ДЕПАРТАМЕНТ ОБРАЗОВАНИЯ
КОМИТЕТА ПО СОЦИАЛЬНОЙ ПОЛИТИКЕ И КУЛЬТУРЕ АДМИНИСТРАЦИИ г. ИРКУТСКА
МУНИЦИПАЛЬНОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ГОРОДА ИРКУТСКА
СРЕДНЯЯ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНАЯ ШКОЛА № 66
(МБОУ г. Иркутска СОШ № 66)

улица Ленская, дом 2 а, г. Иркутск, телефон/факс 34-93-65, телефон 34-93-65
e-mail: school66-admin@mail.ru

Приложение к основной образовательной программе среднего общего образования МБОУ г. Иркутска СОШ № 66

УТВЕРЖДЕНО
приказом № 228/1
от «30» августа 2017 года
Директор МБОУ г. Иркутска СОШ № 66
В.Ф. Федоров ______________

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОГО КУРСА
«Тригонометрия – это просто» для 11 класса
Срок реализации программы 1 год

Составитель программы: Ригус Галина Игоревна, учитель математики
МБОУ г. Иркутска СОШ № 66

Иркутск, 2017

Пояснительная записка

Рабочая программа разработана на основе требований к планируемым результатам основной образовательной программы среднего общего образования МБОУ г. Иркутска СОШ №66.

Рабочая программа включает в себя содержание, тематическое планирование, планируемые результаты обучения. Как *приложение 1* к программе включены оценочные материалы, *приложение 2* – методические материалы.

Количество учебных часов, на которые рассчитана программа:

	11 класс	всего
Количество учебных недель	34	34
Количество часов в неделю	1	
Количество часов в год	34	34

Уровень подготовки учащихся: базовый
Место предмета в учебном плане: компонент образовательного учреждения.

Данная программа предназначена для повышения эффективности подготовки учащихся 11-х классов к итоговой аттестации по алгебре и началам анализа за курс полной средней школы и предусматривает их подготовку к дальнейшему математическому образованию, так как анализ сдачи единого государственного экзамена показал, что ученики допускают много ошибок при выполнении заданий именно этого раздела или вообще не берутся за такие задания.

Этот недостаток в получении тригонометрических знаний помогает устранять данный элективный курс.

Раздел «Тригонометрия» школьного курса математики наиболее сложный для учащихся. Одной из причин этого является недостаточное количество программных часов, отводимое на изучение этого раздела, а так же поверхностное изложение некоторых важных вопросов, связанных с решением тригонометрических уравнений, отбором и исследованием корней, решением тригонометрических неравенств.

Школьная программа по математике содержит лишь самые необходимые, максимально упрощённые знания по данному разделу. Практика показывает громадный разрыв между содержанием школьной программы по математике и теми требованиями, которые налагаются на учащихся при сдаче ЕГЭ. Поэтому данная программа призвана ликвидировать этот разрыв и подготовить учащихся к успешной сдаче ЕГЭ по разделу «Тригонометрия”.

Целью курса является:

- коррекция базовых математических знаний, систематизация, расширение и углубление знаний в вопросах исследования тригонометрических функций с помощью их графиков, решения уравнений и неравенств;
- развитие познавательных интересов и творческих способностей учащихся, психических способностей ребенка, обеспечивающих его адаптацию в дальнейшей жизни, научить школьников учиться посредствам личностно-ориентированного подхода;
- воспитание творческой личности, умеющей самореализовываться и интегрироваться в системе мировой математической культуры.

Задачи курса:

- акцентировать внимание учащихся на единых требованиях к правилам оформления различных видов заданий, включаемых в итоговую аттестацию за курс полной общеобразовательной средней школы;
- расширить математические представления учащихся по определённым темам раздела "Тригонометрия";
- формировать навыки применения свойств тригонометрических функций и соотношение между тригонометрическими функциями при преобразовании тригонометрических выражений, при решении тригонометрических уравнений и неравенств, при решении нестандартных задач;
- развивать способности учащихся к математической деятельности,
- способствовать совершенствованию и развитию важнейших математических знаний и умений, предусмотренных программой.

Курс ориентирован на расширение базового уровня знаний учащихся по математике, является предметно-ориентированным и дает учащимся возможность познакомиться с интересными, нестандартными вопросами тригонометрии, с весьма распространенными методами решения тригонометрических задач, проверить свои способности к математике. Вопросы, рассматриваемые в курсе, выходят за рамки обязательного содержания. Вместе с тем, они тесно примыкают к основному курсу. Поэтому данный элективный курс будет способствовать совершенствованию и развитию важнейших математических знаний и умений, предусмотренных школьной программой, поможет оценить свои возможности по математике.

Для реализации данного курса используются различные формы организации занятий, такие как лекция и семинар, групповая, индивидуальная, работа в парах, исследовательская и проектная деятельность учащихся, практикумы и консультации.

Результатом предложенного курса должно быть успешное решение заданий ЕГЭ по теме "Тригонометрия".

Итоги реализации данной программы подводятся в форме практических и самостоятельных работ, тестов, КИМов, выставки (графиков тригонометрических функций), представления и защиты презентаций.

Содержание учебного предмета

Тема 1. Основные понятия и свойства тригонометрических функций. (9 часов)

Единичная окружность в тригонометрии. Отображение точек числовой прямой на точки единичной окружности. Способ записи координаты точки на единичной окружности. Тригонометрические функции острого угла. Знаки значений тригонометрических функций по четвертям. Формулы приведения. Метод лепестков. Числовые промежутки на единичной окружности.

(Так как учащиеся знакомы с данным материалом из курса алгебры и начала анализа в 10 классе, то данные занятия проводится в форме консультации для повторения и систематизации знаний по данной теме).

Приёмы и методы. Разъяснение; решение заданий с опорой на правила, формулы, свойства. Исследование. Самоанализ схем, формул по поиску общего вывода;

доказательство закономерности, алгоритма; разрешение противоречий с опорой на сравнение в практической деятельности учащихся при решении задач.

Техническое оснащение занятий. Демонстрационный материал по темам. Таблица тригонометрических формул. Дидактическое пособие для учащихся «Тригонометрические выражения и их преобразования» под редакцией С. А. Теляковского.

Тема 2. Решение тригонометрических уравнений и неравенств (13 часов)

Решение простейших тригонометрических неравенств. Решение систем тригонометрических неравенств. Решение простейших тригонометрических уравнений. Уравнения сводимые к алгебраическим. Однородные уравнения. Уравнения, решаемые с помощью формул сложения. Уравнения, решаемые с помощью формул понижения степени. Контрольная работа и зачет по теме: « Решение тригонометрических уравнений и неравенств».

Форма проведения занятий. Самостоятельная работа, групповая, консультация

(Учащиеся самостоятельно повторяют формулы, их применение к преобразованию тригонометрических выражений. Выполняют предложенные задания, общаясь между собой. При необходимости обращаются за консультацией к учителю).

Приёмы и методы. Самостоятельная работа на применение знаний по теме; работа с книгой; опора на правила, формулы, свойства; выполнение заданий по образцу с последующим обобщением и проверкой.

Техническое оснащение занятий. Сборники подготовки к ЕГЭ. Демонстрационный материал.

Тема 3. Нестандартные методы и приемы решение тригонометрических уравнений *(12 часов).*

Уравнения вида $a\sin x + b\cos x = c$. Уравнения, в которых присутствуют $\sin ax \pm \cos ax$ или $\sin ax \cdot \cos ax$ или $\sin 2ax$. Уравнения, содержащие обратные тригонометрические функции. Контрольная работа и зачет по теме: « Нестандартные методы и приемы решение тригонометрических уравнений».

(Создать содержательные организационные условия для восприятия, осмысления и закрепления учащимися новых фактов и сведений).

Форма проведения занятий. Практикум, тестирование.

(Учащиеся отрабатывают навыки применения формул преобразования произведения в сумму и суммы в произведение при преобразовании выражений, Учащиеся работают в парах, консультируя друг друга. Учитель помогает им, по мере необходимости даёт групповые или индивидуальные консультации).

Приёмы и методы. Самоанализ схем, формул по поиску общего вывода; выявление закономерности, алгоритма; разрешение противоречий с опорой на сравнение в практической деятельности учащихся при решении задач.

Техническое оснащение занятий. Сборники ЕГЭ 2017-2018 г. г. Компьютерный класс.

Тематический план

№ п/п	Название темы	Кол-во часов
	Тема 1. Основные понятия и свойства тригонометрических функций.	**9**
1	Единичная окружность в тригонометрии. Отображение точек числовой прямой на точки единичной окружности. Способ записи координаты точки на единичной окружности.	1
2	Тригонометрические функции острого угла.	1
3	Знаки значений тригонометрических функций по четвертям.	1
4	Формулы приведения.	2
5	Метод лепестков.	2
6	Числовые промежутки на единичной окружности.	2
	Тема 2. Решение тригонометрических уравнений и неравенств	**13**
7	Решение простейших тригонометрических неравенств.	1
8	Решение систем тригонометрических неравенств.	2
9	Решение простейших тригонометрических уравнений. Уравнения, сводимые к алгебраическим.	2
10	Однородные уравнения.	2
11	Уравнения, решаемые с помощью формул сложения.	2
12	Уравнения, решаемые с помощью формул понижения степени.	2
13	*Контрольная работа по теме:* *« Решение тригонометрических уравнений и неравенств».*	1
14	*Зачет по теме: « Решение тригонометрических уравнений и неравенств».*	1
	Тема 3. Нестандартные методы и приемы решение тригонометрических уравнений	**12**
15	Уравнения вида $a\sin x + b\cos x = c$	3
16	Уравнения, в которых присутствуют $\sin ax \pm \cos ax$ или $\sin ax \cdot \cos ax$ или $\sin 2ax$.	3
17	Уравнения, содержащие обратные тригонометрические функции.	3
18	*Контрольная работа по теме: « Нестандартные методы и приемы решение тригонометрических уравнений».*	1
19	*Зачет по теме: « Нестандартные методы и приемы решение тригонометрических уравнений».*	1
20	Итоговый урок	1
	Всего	**34**

Планируемые результаты освоения учебного предмета

<u>Должны знать:</u>

- Основные тригонометрические тождества.
- Формулы приведения.
- Синус, косинус и тангенс суммы и разности двух углов.
- Синус, косинус и тангенс двойного угла.
- Формулы половинного угла.
- Преобразования суммы тригонометрических функций в произведение и произведения в сумму.
- Выражение тригонометрических функций через тангенс половинного аргумента.
- Простейшие тригонометрические уравнения. Приемы решения тригонометрических различных видов уравнений.
- Простейшие тригонометрические неравенства.

Должны уметь:

- проводить тождественные преобразования тригонометрических выражений с помощью основных формул тригонометрии;
- решать тригонометрические уравнения различных видов, тригонометрические неравенства и их системы либо на единичной окружности, либо по графику, либо аналитически;
- применять аппарат математического анализа.

Приложение 1. **ОЦЕНОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ**

Тест «Основы тригонометрии»

1 вариант

В заданиях 1)-3)указать четверть, в которой находится точка, полученная поворотом точки P (1;0) на заданный угол:

1.$-\frac{3\pi}{4}$

2. 150°

3. $\frac{7\pi}{6}$

В заданиях 4)-18) вычислить:

4. $\operatorname{t}g\frac{\pi}{4}$
5. $cos\frac{\pi}{6}$
6. $sin\frac{\pi}{2}$
7. $sin\frac{2\pi}{3}$
8. $\sin\frac{\pi}{3}$
9. $tg\frac{\pi}{6}$
10. $\sin 45^{\circ}$
11. $\cos 150^{\circ}$
12. $tg300^{\circ}$
13. $\sin\frac{5}{6}\pi$
14. $\sin(-\frac{5}{6}\pi)$
15. $\cos\frac{5}{4}\pi$
16. $\sin\frac{47}{6}\pi$
17. $\sin\frac{7\pi}{6}$
18. $\sqrt{3}\cos\frac{2}{3}\pi\cdot\cos\frac{\pi}{6}$
19. Вычислить $\sin\alpha$, если $\cos\alpha=\frac{3}{5},(0<\alpha<\frac{\pi}{2})$
20. Вычислить значение $\operatorname{tg}\alpha$, если $\sin\alpha=-\frac{5}{13,}(\pi<\alpha<\frac{3}{2}\pi)$.

2 вариант

В заданиях 1)-3) указать четверть, в которой находится точка, полученная поворотом точки Р (1;0) на заданный угол:

1. $\frac{2\pi}{3}$
2. 460°
3. $-\frac{5\pi}{6}$

В заданиях 4)-18) вычислить:

4. $\cos\frac{\pi}{2}$
5. $tg\frac{\pi}{3}$
6. $sin\frac{\pi}{6}$
7. $\cos\frac{3\pi}{2}$
8. $tg\pi$
9. $\cos 60^{\circ}$
10. $\sin 135^{\circ}$
11. $tg390^{\circ}$
12. $\sin\frac{2}{3}\pi$

13. $\cos\frac{5}{6}\pi$

14. $tg\frac{25}{4}\pi$

15. $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

16. $sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

17. $\sin(-\frac{5\pi}{6})$

18. $tg\frac{5}{4}\pi + sin^2\frac{\pi}{4}$

19. Вычислить $\sin\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{4}{5}, (0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$

20. Вычислить значение $\mathrm{t}g\,\alpha$, если $\cos\alpha = 0{,}8;\ (\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi)$

3 вариант

В заданиях 1)-3) указать четверть, в которой находится точка, полученная поворотом точки P (1;0) на заданный угол:

1. $\frac{7\pi}{6}$

2. 160°

3. $-\frac{5\pi}{3}$

В заданиях 4)-18) вычислить:

4. $sin\frac{\pi}{3}$

5. $tg2\pi$

6. $\cos\frac{5}{2}\pi$

7. $\sin\frac{\pi}{4}$

8. $tg\frac{\pi}{4}$

9. $\sin 30^\circ$

10. $\cos 120^\circ$

11. $tg315^\circ$

12. $cos\frac{5}{3}\pi$

13. $\cos\frac{3}{4}\pi$

14. $\cos\frac{21}{4}\pi$

15. $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

16. $tg\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

17. $\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$

18. $\cos\frac{\pi}{6}\cdot tg\frac{2}{3}\pi$

19. вычисли $\sin\alpha,$ если $\cos\alpha = -0{,}8, (\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi)$

20. Вычислить значение $\mathrm{tg}\,\alpha$, если $\sin\alpha = -\frac{12}{13,}(\pi < \alpha < \frac{3}{2})$

4 вариант

В заданиях 1)-3 указать четверть, в которой находится точка, полученная поворотом точки P (1;0) на заданный угол:

1. $-\frac{\pi}{6}$ 2.135° 3.$\frac{5\pi}{3}$

В заданиях 4)-18) вычислить:

4. $sin\frac{\pi}{4}$
5. $tg\pi$
6. $\cos\frac{7}{2}\pi$
7. $\sin\frac{\pi}{6}$
8. $tg\frac{\pi}{3}$
9. $\sin 60^\circ$
10. $\cos 135^\circ$
11. $tg120^\circ$
12. $cos\frac{2}{3}\pi$
13. $\cos\frac{5}{4}\pi$
14. $\cos\frac{28}{4}\pi$
15. $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$
16. $tg\left(-\frac{\pi}{6}\right)$
17. $\cos\left(-\frac{7\pi}{6}\right)$
18. $\cos\frac{5\pi}{6}\cdot tg\frac{\pi}{3}$
19. Вычисли $\sin\alpha$, если $\sin\alpha = 0{,}6$, $(0 < \alpha < 90^\circ)$
20. Вычислить значение tg α, если $cos\,\alpha = -\frac{5}{13,}(\pi < \alpha < \frac{3}{2})$

Тест по теме: "Тригонометрические уравнения".

Вариант 1

1. Решите уравнение $\cos 2x - 1 = 0$.

2. Решите уравнение $2\sin 3x = -1$.

3. Решите уравнение $ctg\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = \sqrt{3}$.

4. Решите уравнение $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{2x}{3}\right) = \frac{1}{2}$.

5. Решите уравнение $\cos\left(\pi - \frac{5x}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

6. Решите уравнение $2\sin^2 x - 7\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - 5 = 0$.

7. Решите уравнение $\cos(2\pi - 2x) + 3\sin(\pi - x) = 2$.

8. Решить уравнение $2\sin(3\pi - x)$ - $3\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$=0.

9. Решить уравнение $\sin^2\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) - \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)\cos x = 0$.

10. Решить уравнение $4\sin^2 x - 2\sin\left(\dfrac{3\pi}{2} - x\right)\sin x = 3$.

Вариант 2

1. Решите уравнение $ctg\left(\dfrac{3\pi}{2} - 2x\right) - \sqrt{3} = 0$.

2. Решите уравнение $2\cos 2x = -1$.

3. Решите уравнение $15\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - 5x\right) = 0$.

4. Решите уравнение $\sin 2x \cos 2x = -\dfrac{1}{4}$.

5. Решите уравнение $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{2x}{3}\right) = \sin\dfrac{\pi}{3}$.

6. Решите уравнение $3\sin^2(2\pi - 2x) + 7\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - 2x\right) - 3 = 0$.

7. Решите уравнение $4 + 5\sin\left(\dfrac{3\pi}{2} - x\right) - 2\sin^2(4\pi - x) = 0$

8. Решить уравнение $\sin(3\pi - 2x)$ - $\sin\left(\dfrac{3\pi}{2} - 2x\right)$=0.

9. Решить уравнение $4\sin^2(\pi - x) - \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + 2x\right) = 3$.

10. Решить уравнение $6\sin^2 x + \dfrac{1}{2}\sin(\pi - 2x) - \cos^2(\pi - x) = 2$

Самостоятельная работа

Вариант 1.

1. Найдите $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{91}}{10}$ и $\alpha \in (0; 0,5\pi)$
2. Найдите $\sin\alpha$, если $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ и $\alpha \in (0; 0,5\pi)$.
3. Найдите $\operatorname{tg}\alpha$, если $\cos\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{13}}$ и $\alpha \in (1,5\pi; 2\pi)$.

Вариант 2.

1. Найдите $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{51}}{10}$ и $\alpha \in (1,5\pi; 2\pi)$.
2. Найдите $\sin\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{\sqrt{21}}{5}$ и $\alpha \in (0; 0,5\pi)$.
3. Найдите $\operatorname{tg}\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{5}{\sqrt{34}}$ и $\alpha \in (0,5\pi; \pi)$.

Вариант 3.

1. Найдите $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{7}}{4}$ и $\alpha \in (\pi; 1,5\pi)$.
2. Найдите $\sin\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$ и $\alpha \in (0; 0,5\pi)$.
3. Найдите $\operatorname{tg}\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{29}}$ и $\alpha \in (1,5\pi; 2\pi)$.

Вариант 4.

1. Найдите $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\alpha \in (0,5\pi; \pi)$.
2. Найдите $\sin\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{3\sqrt{11}}{10}$ и $\alpha \in (1,5\pi; 2\pi)$.
3. Найдите $\operatorname{tg}\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{10}}$ и $\alpha \in (\pi; 1,5\pi)$.

Вариант 5.

1. Найдите $\operatorname{tg}\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{10}{\sqrt{104}}$ и $\alpha \in (1,5\pi; 2\pi)$.
2. Найдите $3\cos\alpha$, если $\sin\alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ и $\alpha \in (\frac{3\pi}{2}; 2\pi)$.
3. Найдите $5\sin\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}$ и $\alpha \in (\frac{3\pi}{2}; 2\pi)$.

Тест по теме: «**Простейшие тригонометрические неравенства**

<u>**Вариант 1**</u>

1. Решите уравнение $2\sin 4x - 1 \geq 0$

2. Решите уравнение $\cos\left(-\frac{x}{2}\right) < \frac{\sqrt{3}}{2}$

3. Решите уравнение $tg2x \geq \sqrt{3}$

4. Решите уравнение $2\sin\frac{2x}{3} \leq -1$

5. Решите уравнение $ctg(-4x) \geq -\frac{\sqrt{3}}{3}$

6. Решите уравнение $\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) - 2\cos(4\pi - 2x) < \frac{\sqrt{2}}{2}$

7. Решите уравнение $\sin(2\pi - 0{,}5x) + 3\sin(\pi - 0{,}5x) \geq -\sqrt{2}$

8. Решите уравнение $2\cos\left(3\pi - \frac{x}{4}\right) + 3\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{4}\right) < 0$

9. Решите уравнение $ctg\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + 2tg(\pi + x) \leq -1$

Тест по теме: «**Простейшие тригонометрические неравен**

<u>Вариант 2</u>

1. Решите уравнение $2\sin 2x+\sqrt{3}\geq 0$

2. Решите уравнение $\cos\left(-\frac{x}{3}\right)<\frac{\sqrt{2}}{2}$

3. Решите уравнение $tg4x\geq\frac{\sqrt{3}}{3}$

4. Решите уравнение $2\sin\frac{3x}{2}\leq-\sqrt{3}$

5. Решите уравнение $ctg(-7x)\geq-1$

6. Решите уравнение $\sin\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)+2\cos(\pi-2x)<\frac{\sqrt{3}}{2}$

7. Решите уравнение $\cos(2\pi-0{,}5x)+3\cos(\pi-0{,}5x)\geq 1$

8. Решите уравнение $15\cos(3\pi-5x)\ +56\sin\left(\frac{\pi}{2}-5x\right)<0$

9. Решите уравнение $ctg\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)+2ctg\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)\leq-1$

Приложение 2. **МЕТОДИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ**

Теоретическая часть

Основные тригонометрические формулы

$$sin^2\propto+cos^2\propto=1\ \Rightarrow\qquad sin^2\propto=1-cos^2\propto;\qquad cos^2\propto=1-sin^2\propto$$

$$1+ctg^2\propto=\frac{1}{sin^2\propto}\qquad\qquad 1+tg^2\propto=\frac{1}{cos^2\propto}$$

$$cos(\propto+\beta)=cos\propto cos\beta-sin\propto sin\beta$$
$$cos(\propto-\beta)=cos\propto cos\beta+sin\propto sin\beta$$
$$sin(\propto+\beta)=sin\propto cos\beta+cos\propto sin\beta$$
$$sin(\propto-\beta)=sin\propto cos\beta-cos\propto sin\beta$$

$$\cos 2\propto=cos^2\propto-sin^2\propto \text{ или } cos\propto=cos^2\frac{\propto}{2}-sin^2\frac{\propto}{2}$$
$$\cos 2\propto=1-2sin^2\propto=2cos^2-1$$
$$\sin 2\propto=2sin\propto cos\propto \text{ или } sin\propto=2cos\frac{\propto}{2}sin\frac{\propto}{2}$$
$$tg(\propto\pm\beta)=\frac{tg\propto\pm tg\beta}{1\mp tg\propto\cdot tg\beta}$$

$$tg\ 2\propto = \frac{2tg\propto}{1-tg^2\propto}$$

<u>Формулы понижения степени.</u>

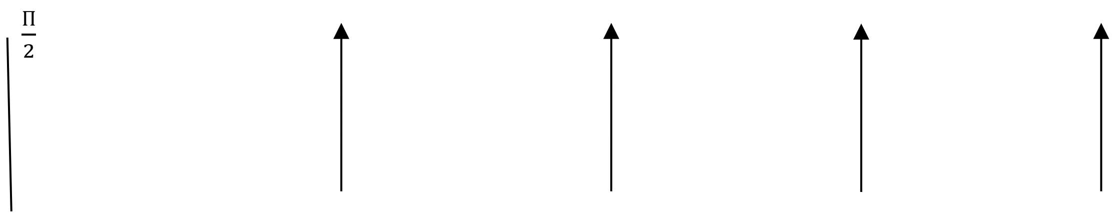
$$1-cos\propto = 2sin^2\frac{\propto}{2}\ \text{или}\ 1-\cos 2\propto = 2sin^2\propto$$
$$1+\cos\propto = 2cos^2\frac{\propto}{2}\ \text{или}\ 1+\cos 2\propto = 2cos^2\frac{\propto}{\ }$$

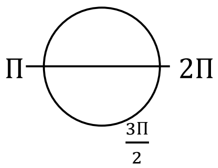
$1+sin2\propto = (sin\propto + cos\propto)^2$
$1-sin2\propto = (sin\propto - cos\propto)^2$

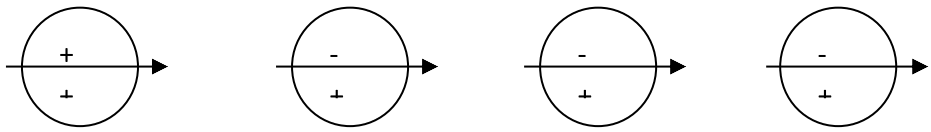
$$cos\propto + cos\beta = 2cos\frac{\propto+\beta}{2}cos\frac{\propto-\beta}{2}$$
$$cos\propto - cos\beta = -2sin\frac{\propto+\beta}{2}sin\frac{\propto-\beta}{2}$$
$$sin\propto + sin\beta = 2sin\frac{\propto+\beta}{2}cos\frac{\propto-\beta}{2}$$
$$sin\propto - sin\beta = 2sin\frac{\propto-\beta}{2}cos\frac{\propto+\beta}{2}$$
$$cos\varDelta = 0, \qquad \varDelta = \frac{\Pi}{2}+\Pi n$$
$$cos\varDelta = 1, \qquad \varDelta = 2\Pi n$$
$$cos\varDelta = -1, \qquad \varDelta = \Pi + 2\Pi n$$
$$cos\varDelta = a, \qquad \varDelta = \pm\arccos a + 2\Pi n$$
$$sin\varDelta = 0, \qquad \varDelta = \Pi n$$
$$sin\varDelta = 1, \qquad \varDelta = \frac{\Pi}{2}+2\Pi n$$
$$sin\varDelta = -1, \qquad \varDelta = -\frac{\Pi}{2}+2\Pi n$$
$$sin\varDelta = a, \qquad \varDelta = (-1)^n arcsin\,a + \Pi n$$

$|a| \leq 1$

$$arccos(-a) = \Pi - arccos\,a$$
$$arcsin(-a) = -arcsin\,a$$
$$tg\varDelta = 1, \varDelta = \frac{\Pi}{4}+\Pi n$$
$$tg\varDelta = -1, \varDelta = -\frac{\Pi}{4}+\Pi n$$
$$tg\varDelta = 0, \varDelta = \Pi n, n \in z$$
$$tg\varDelta = a, \varDelta = arctg\ a + \Pi n$$
$$arctg(-a) = -arctg\ a$$
$$tg\frac{\Pi}{2} - \text{не существует}$$
$$ctg\ x = 0, x = \frac{\Pi}{2}+\Pi n, n \in z$$
$$ctg\ x = 1, x = \frac{\Pi}{4}+\Pi n$$
$$ctg\ x = -1, x = -\frac{\Pi}{4}+\Pi n$$
$$ctg\ x = a, x = arcctg\ x + \ \Pi n$$







$sin \propto$ $cos \propto$ $tg \propto$ $ctg \propto$

$$sin \propto = y - \textit{ордината}$$
$$cos \propto = \frac{x}{1} = x - \textit{абсцисса}$$

$\propto$	$\frac{П}{6}$ 30°	$\frac{П}{4}$ 45°	$\frac{П}{3}$ 60°	$\frac{П}{2}$ 90°	$\frac{2П}{3}$ 120°	$\frac{3П}{4}$ 135°	$\frac{5П}{6}$ 150°	$П$ 180°	$\frac{7П}{6}$ 210°	$\frac{5П}{4}$ 225°	$\frac{4П}{3}$ 240°	$\frac{3П}{2}$ 270°	$2П$ 360°	0°
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	1	1
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	0
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	0	0
ctg	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	-	-

<u>Формулы приведения.</u>

	$\frac{П}{2}-\propto$	$\frac{П}{2}+\propto$	$П-\propto$	$П+\propto$	$\frac{3П}{2}-\propto$	$\frac{3П}{2}+\propto$	$2П+\propto$	$2П-\propto$	$-\propto$
cos	$sin \propto$	$-sin \propto$	$-cos \propto$	$-cos \propto$	$-sin \propto$	$sin \propto$	$cos \propto$	$cos \propto$	$cos \propto$
sin	$cos \propto$	$cos \propto$	$sin \propto$	$-sin \propto$	$-cos \propto$	$-cos \propto$	$sin \propto$	$-sin \propto$	$-sin \propto$
tg	$ctg \propto$	$-ctg \propto$	$-tg \propto$	$tg \propto$	$ctg \propto$	$-ctg \propto$	$tg \propto$	$-tg \propto$	$-tg \propto$
ctg	$tg \propto$	$-tg \propto$	$-ctg \propto$	$ctg \propto$	$tg \propto$	$-tg \propto$	$ctg \propto$	$-ctg \propto$	$-ctg \propto$

Дата ____________ **Класс**_____________

УРОК

Тема урока Решение простейших тригонометрических уравнений

<table>
<tr><td rowspan="3">Цели урока</td><td>О</td><td>Повторить решение простейших тригонометрических уравнений, актуализировать знания обучающихся при решении простейших тригонометрических уравнений графическим способом.</td></tr>
<tr><td>Р</td><td>▪ содействовать развитию логического мышления обучающихся;
▪ развивать умения рассуждать, сравнивать, осмысливать материал.</td></tr>
<tr><td>В</td><td>▪ воспитание познавательного интереса, элементов культуры общения;
▪ побуждение обучающихся к преодолению трудностей в процессе умственной деятельности</td></tr>
</table>

Тип урока: повторение
Метод урока: объяснительно - иллюстративный, практический
Формы организации урока: коллективная
Оборудование: мультимедиа

Ход урока

I. **Организационный этап**
Сформулировать тему и цель урока. Организовать обучающихся на работу на уроке.

II. **Актуализация**
Повторить формулы решения простейших тригонометрических уравнений и решение их графическим способом.

III. **Закрепление**

Решите уравнение: $\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)=0$.
В ответе запишите
наибольший отрицательный корень.

Решите уравнение: $\cos\left(\frac{\pi x}{8}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$.
В ответе запишите
наибольший отрицательный корень.

IV. **Итог**
Домашнее задания на сайте uztest.ru

Введение

Прежде чем перейти к рассмотрению тригонометрических уравнений, остановимся на некоторых важных вопросах, имеющих непосредственное отношение к решению этих уравнений.

Формулы записи решений простейших тригонометрических уравнений

В большинстве учебников для записи решений простейших уравнений используются следующие формулы:

Вид уравнения	Общая формула решений
$\sin x = a$, $\lvert a \rvert \le 1$	$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$
$\cos x = a$, $\lvert a \rvert \le 1$	$x = \pm \arccos a + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$
$\mathrm{tg} x = a$	$x = \mathrm{arctg} a + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$
$\mathrm{ctg} x = a$	$x = \mathrm{arcctg} a + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$

При повторении формул решения уравнений следует обратить внимание на то, что формулы задают множества чисел, которые образованы по закону арифметической прогрессии с разностью 2π

Геометрическая иллюстрация решения простейших тригонометрических уравнений

Все числа вида $\alpha + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$ соответствуют единственной точке числовой окружности P_α, так как при обходе окружности в положительном или отрицательном направлении на целое число оборотов из данной точки P_α приходим в эту же точку.

уравнения вида $\sin x = a$

Числа вида $\alpha + 2\pi n$ или $-\alpha + \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$ на числовой окружности изображаются точкой P_α или $P_{-\alpha+\pi}$ соответственно. Эти точки расположены на окружности симметрично относительно оси y. Эти два множества чисел можно записать в виде $(-1)^n\alpha+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$.

Пример 1. *Изобразить на числовой окружности множество решений уравнения* $\sin x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение. Запишем решения данного уравнения $x=\dfrac{\pi}{4}+2\pi n$ или $x=\dfrac{3\pi}{4}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

Две точки на окружности $P_{\frac{\pi}{4}}$ и $P_{\frac{3\pi}{4}}$, изображающие решения этого уравнения, расположены симметрично относительно оси ординат (см. рис. 2).

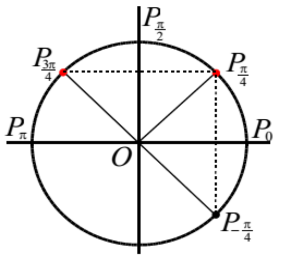


Рис. 2

уравнения вида $\cos x=a$

Числа вида $\alpha+2\pi n$ или $-\alpha+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$, на числовой окружности изображаются точкой P_{α} или $P_{-\alpha}$ соответственно. Точки расположены на окружности симметрично относительно оси x. Эти два множества чисел можно записать в виде $\pm\alpha+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$.

Пример 2. *Изобразить на числовой окружности множество решений уравнения* $\cos x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$**.**

Решение. Запишем решения данного уравнения $x=\dfrac{\pi}{6}+2\pi n$ или $x=-\dfrac{\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. Две точки на окружности $P_{\frac{\pi}{6}}$ и $P_{-\frac{\pi}{6}}$, изображающие решения этого уравнения, расположены симметрично относительно оси абсцисс (см. рис. 3).

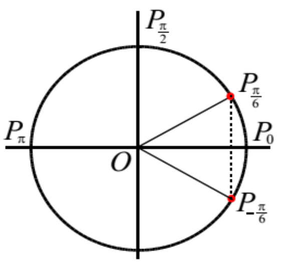


Рис. 3

уравнения вида $\mathrm{tg}x=a$ или $\mathrm{ctg}x=a$

Числа вида $\alpha+2\pi n$ или $\alpha+\pi+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$, на числовой окружности изображаются точками P_{α} или $P_{\alpha+\pi}$. Точки расположены на окружности симметрично относительно начала координат. Эти два множества чисел можно записать в виде $\alpha+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$.

Пример 3. *Изобразить на числовой окружности множество решений уравнения* $\mathrm{tg}x=\sqrt{3}$**.**

Решение. Запишем решения данного уравнения $x=\dfrac{\pi}{3}+2\pi n$ или $x=\dfrac{4\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. Две точки на окружности $P_{\frac{\pi}{3}}$ и $P_{\frac{4\pi}{3}}$, изображающие решения этого уравнения, расположены симметрично относительно начала координат (см. рис. 4).

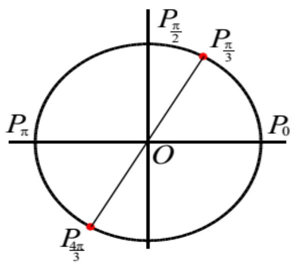


Рис. 4

Пример 4. *Изобразить на числовой окружности множество решений уравнения* $\mathrm{ctg}x=\sqrt{3}$**.**

Решение. Запишем решения данного уравнения $x=\dfrac{\pi}{6}+2\pi n$ или $x=\dfrac{7\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. Точки на окружности $P_{\frac{\pi}{6}}$ и $P_{\frac{7\pi}{6}}$, изображающие решения этого уравнения, расположены симметрично относительно начала координат (см. рис. 5).

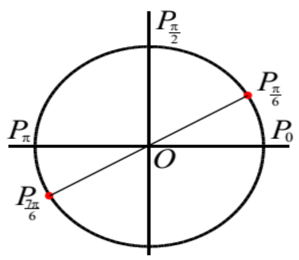


Рис. 5

уравнения вида $T(\alpha x)=a$

Для уравнений вида $T(\alpha x)=a$, где через T обозначена одна из простейших тригонометрических функций, изображение решений уравнения связано с точками-вершинами правильного многоугольника.

Числам вида $\alpha + \frac{2\pi n}{k}$, $n \in \mathbf{Z}$, $k \in \{3; 4; 5; ...\}$ на числовой окружности соответствуют вершины правильного k-угольника, вписанного в окружность.

Случаи $k = 1$ и $k = 2$ рассмотрены выше. При $k = 1$ получаем единственную точку на окружности, а при $k = 2$ – две диаметрально противоположные точки окружности.

Пример 5. *Изобразить на числовой окружности множество решений уравнения* $\sin 3x = 1$.

Решение. Решениями данного уравнения являются числа вида $\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}$, $n \in \mathbf{Z}$.

Придавая последовательно значения 0, 1, 2 переменной n, получим три точки (вершины правильного треугольника) на окружности (см. рис. 6), соответствующие числам $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$ и $\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3} = \frac{3\pi}{2}$.

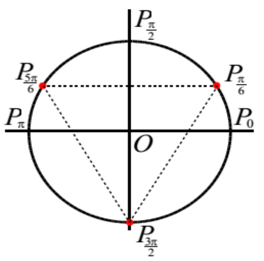


Рис. 6

Тренировочные упражнения

1. Изобразите множество решений уравнения, используя числовую окружность:

а) $\sin 2x = \frac{1}{2}$; **б)** $\sin x = 0$;

в) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; **г)** $\sin x = 0{,}2$;

д) $\cos x = \frac{1}{2}$; **е)** $\cos x = 0$;

ж) $\cos 3x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; **з)** $\cos x = -0{,}4$;

и) $\mathrm{tg} x = \sqrt{3}$; **к)** $\mathrm{tg} x = -\sqrt{3}$;

л) $\mathrm{tg} 5x = 0$.

Решения задания 13 и критерии оценивания

$\boxed{\mathbf{13}}$ а) Решите уравнение $\cos\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; \frac{\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $x = \frac{2n\pi}{3}$; $n \in Z$

б) -2π, 0, $-\frac{2\pi}{3}$, и $-\frac{4\pi}{3}$.

Решение: а)Так как $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$, получаем: $2\cos^2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-1+\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=-1\\ \cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow$

$$\left\{\begin{array}{l} x-\frac{\pi}{3}=\pi+2n\pi \\ x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}+2k\pi \\ x-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{3}+2m\pi \end{array}\right., \quad k,n,m\in Z$$

откуда находим, что $x=\frac{4\pi}{3}+2n\pi$, или $x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi$, или $x=2m\pi$.

б) Используя единичную окружность (или с помощью графика, или путём решения двойных неравенств и т.п.) находим, что отрезку $\left[-2\pi; \frac{\pi}{2}\right]$ принадлежат корни -2π, 0, $-\frac{2\pi}{3}$ и $-\frac{4\pi}{3}$.

Замечания. 1)Текст решения должен содержать обоснованный как-либо отбор корней.

Баллы	**Критерии оценивания задания 13**
2	Обоснованно получены верные ответы в п. а) и в п. б)
1	Обоснованно получен верный ответ в п. а) или в п. б) ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения и отбора корней
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше

13 а) Решите уравнение $2\sin^3 x - 2\sin x = \cos^2 x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}, 3\pi\right]$.

Ответ: а) $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $x=(-1)^{n+1}\cdot\frac{\pi}{6}+n\pi$; где $k,n\in Z$.

б) $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{2}$ и $\frac{11\pi}{6}$.

Решение.

а) $2\sin x\left(\sin^2 x-1\right)=\cos^2 x$, $-2\sin x\cos^2 x=\cos^2 x$, откуда находим, что $\cos x=0$ или $\sin x=-\frac{1}{2}$.

Поэтому $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ или $x=(-1)^{n+1}\cdot\frac{\pi}{6}+n\pi$.

б) Используя единичную окружность (или с помощью графика, или путём решения двойных неравенств и т.п.) находим, что отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}, 3\pi\right]$ принадлежат корни $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{2}$ и $\frac{11\pi}{6}$.

Замечание. Текст решения должен содержать обоснованный как-либо отбор корней.

Баллы	**Критерии оценивания задания 13**
2	Обоснованно получены верные ответы в п. а) и в п. б)

1	Обоснованно получен верный ответ в п. а) или в п. б) ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения и отбора корней
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше

13 а) Решите уравнение $\cos 2x + 3\cos x - 1 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{7\pi}{2},\ -2\pi\right]$.

Ответ: а) $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$, где $k \in Z$. б) $-\dfrac{7\pi}{3}$.

Решение.

а) Так как $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, то исходное уравнение примет вид $2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0$, откуда находим, что $\cos x = -2 < -1$ – не подходит, или $\cos x = \dfrac{1}{2}$, $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$.

б) Используя единичную окружность (или с помощью графика, или путём решения двойных неравенств и т.п.) находим, что отрезку $\left[-\dfrac{7\pi}{2},\ -2\pi\right]$ принадлежит только корень $-\dfrac{7\pi}{3}$.

Замечание. Текст решения должен содержать обоснованный как-либо отбор корней.

Баллы	Критерии оценивания задания 13
2	Обоснованно получены верные ответы в п. а) и в п. б)
1	Обоснованно получен верный ответ в п. а) или в п. б) ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения и отбора корней
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше

13 а) Решите уравнение $2\cos^3 x - 2\cos x = \sin^2 x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{3\pi}{2},\ 3\pi\right]$.

Ответ: а) $x = k\pi$ или $x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2n\pi$. где $k, n \in Z$.

б) 2π и $\dfrac{8\pi}{3}$.

Решение.

а) $2\cos x\left(\cos^2 x - 1\right) = \sin^2 x$, $-2\sin^2 x\cos x = \sin^2 x$, откуда находим, что $\sin x = 0$ или $\cos x = -\dfrac{1}{2}$. Поэтому $x = k\pi$ или $x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2n\pi$.

б) Используя единичную окружность (или с помощью графика, или путём решения двойных неравенств и т.п.) находим, что отрезку $\left[\dfrac{3\pi}{2},\ 3\pi\right]$ принадлежат корни 2π и $\dfrac{8\pi}{3}$.

Замечание. Текст решения должен содержать обоснованный как-либо отбор корней.

Баллы	Критерии оценивания задания 13
2	Обоснованно получены верные ответы в п. а) и в п. б)
1	Обоснованно получен верный ответ в п. а) или в п. б) ИЛИ

	Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения и отбора корней
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше