ДЕПАРТАМЕНТ ОБРАЗОВАНИЯ
КОМИТЕТА ПО СОЦИАЛЬНОЙ ПОЛИТИКЕ И КУЛЬТУРЕ АДМИНИСТРАЦИИ г. ИРКУТСКА
МУНИЦИПАЛЬНОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ГОРОДА ИРКУТСКА
СРЕДНЯЯ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНАЯ ШКОЛА № 66
(МБОУ г. Иркутска СОШ № 66)

улица Ленская, дом 2 а, г. Иркутск, телефон/факс 34-93-65, телефон 34-93-65
e-mail: school66-admin@mail.ru

Приложение к основной образовательной программе среднего общего образования МБОУ г. Иркутска СОШ № 66

УТВЕРЖДЕНО
приказом № 228/1
от «30» августа 2017 года
Директор МБОУ г. Иркутска СОШ № 66
В.Ф. Федоров _______________

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОГО КУРСА
«Задачи с параметрами» для 10-11 классов (базовый уровень)
Срок реализации программы 2 года

Составитель программы: Ригус Галина Игоревна, учитель математики
МБОУ г. Иркутска СОШ № 66

Иркутск, 2017

Пояснительная записка

Рабочая программа разработана на основе требований к планируемым результатам основной образовательной программы среднего общего образования МБОУ г. Иркутска СОШ №66.

Рабочая программа включает в себя содержание, тематическое планирование, планируемые результаты обучения. Как *приложение 1* к программе включены оценочные материалы, *приложение 2* – методические материалы.

Количество учебных часов, на которые рассчитана программа:

	10 класс	11 класс	всего
Количество учебных недель	34	34	68
Количество часов в неделю	1	1	
Количество часов в год	34	34	68

Уровень подготовки учащихся: базовый
Место предмета в учебном плане: компонент образовательного учреждения.
Основная задача обучения математике в школе – обеспечить прочное и сознательное овладение учащимися системой математических знаний и умений, необходимых в повседневной жизни и трудовой деятельности каждому члену общества, достаточных для изучения смежных дисциплин и продолжения образования.

Данный факультатив по математике для учащихся 10-11 классов относится к группе факультативов, которые предназначены как для дополнения знаний учащихся, полученных ими на уроках, так и для их углубления.

Структура экзаменационной работы в форме ЕГЭ требует от учащихся не только знаний на базовом уровне, но и умений выполнять задания повышенной и высокой сложности. В рамках урока не всегда возможно рассмотреть подобные задания, поэтому программа факультатива позволяет решить эту задачу.

Курс предусматривает изучение методов решения уравнений и неравенств с модулем, параметрами, расширение и углубление знаний учащихся по решению тригонометрических, иррациональных, показательных и логарифмических уравнений и неравенств. Большое внимание уделяется задачам с параметрами. Задания данного курса не просты в решении, что позволяет повысить учебную мотивацию учащихся.

Задачи с параметрами играют важную роль в формировании логического мышления и математической культуры у школьников, но их решение вызывает значительные трудности. Это связано с тем, что каждое уравнение или неравенство с параметрами представляет собой целый класс обычных уравнений и неравенств, для каждого из которых должно быть получено решение. Поэтому задачи в данном курсе рассматриваются параллельно с изучение соответствующих вопросов на уроках, вместе с тем происходит систематизация знаний и углубление, как по содержанию, так и по практическому применению и методам обоснований, реализуются внутрипредметные связи. Таким образом, данный курс способствует лучшему усвоению базового курса математики, а с другой - служит для внутрипрофильной дифференциации и построения индивидуального образовательного пути, для раскрытия основных закономерностей построения математической теории. Решение задач в математике является эквивалентом эксперимента. Весь курс строится на решении различных по степени важности и сложности задач.

Целью данного курса является формирование целостной системы решения упражнений с параметрами, формированию навыков организации учащимися самостоятельных микроисследований.

Задачи:

- Развить и укрепить имеющиеся навыки, освоить ранее неизвестные учащимся приёмы и методы решения уравнений и неравенств с параметрами.
- Подготовить учащихся к ЕГЭ и дальнейшему обучению в других учебных заведениях.
- Вызвать интерес к изучаемой теме.
- Развивать исследовательскую деятельность школьников.

Содержание учебного предмета

Программа факультатива рассчитана на два года обучения -10 и 11 классы и содержит следующие темы:

“Общие сведения об уравнениях, неравенствах и их системах” ***3 часа***

Основные определения. Область допустимых значений. О системах и совокупностях уравнений и неравенств. Общие методы преобразования уравнений (рациональные корни уравнения, “избавление” от знаменателя, замена переменной в уравнении).

“Методы решения неравенств” ***4 часа***

Некоторые свойства числовых неравенств. Неравенства с переменной. Квадратичные неравенства. Метод интервалов для рациональных неравенств. Метод замены множителей.

“Методы решения систем уравнений” ***3 часа***

Системы алгебраических уравнений. Замена переменных. Однородные системы. Симметрические системы.

“Уравнения с модулем” ***4 часа***

Модуль числа. Свойства модуля. График функции $y = |x|$. Методы решения уравнений с модулем. Решение комбинированных уравнений, содержащих переменную и переменную под знаком модуля.

“Неравенства с модулем” ***4 часа***

Теорема о равносильности неравенства с модулем и рационального неравенства. Основные методы решения неравенств с модулем.

“Уравнения с параметрами” ***4 часа***

Понятие уравнения с параметром, примеры. Контрольные значения параметра. Основные методы решения уравнений с параметром. Линейные уравнения с параметром.

“Неравенства с параметрами” ***3 часа***

Понятие неравенства с параметром, примеры. Основные методы решения неравенств с параметрами. Линейные неравенства с параметрами.

“Квадратные уравнения и неравенства, содержащие параметр” ***6 часов***

Теорема Виета. Расположение корней квадратного трёхчлена. Алгоритм решения уравнений. Аналитический и графический способы. Решение уравнений с нестандартным условием.

“Тригонометрические уравнения и неравенства” ***6 часов***

Метод решения тригонометрических уравнений и неравенств. Отбор корней в тригонометрических уравнениях. Примеры систем тригонометрических уравнений. Уравнения и неравенства, содержащие обратные тригонометрические функции.

“Иррациональные уравнения и неравенства” ***5 часов***

Методы решения иррациональных уравнений и неравенств (возведение в степень, замена переменных).

“Логарифмические и показательные уравнения и неравенства” ***5 часов***

Методы решении показательных и логарифмических уравнений . Преобразования логарифмических уравнений. Замена переменных в уравнениях. Логарифмирование. Показательные и логарифмические неравенства. Методы решений показательных и логарифмических неравенств (метод замены переменных, метод замены множителей).

“Нестандартные методы решения уравнений и неравенств” ***5 часов***

Применение свойств квадратного трехчлена. Использование свойств функции (свойство ограниченности, монотонности). Использование суперпозиций функций.

“Задачи с параметрами” ***8 часов***

Решение уравнений и неравенств ***7 часов***

Решение задач из сборников ЕГЭ в конце 10 класса 2 часа, 11 класса – 5 часов

Тематический план

№ п/п	Наименование разделов и тем	Всего часов
	10 класс	
	Глава I. Общие сведения об уравнениях, неравенствах и их системах	**6**
1.	Основные определения	2
2.	Область допустимых значений.	1
3.	О системах и совокупностях уравнений и неравенств	1
4.	Общие методы преобразования уравнений.	2
	Глава II. Методы решения неравенств	**8**
5.	Некоторые свойства числовых неравенств	2
6.	Неравенства с переменной. Квадратичные неравенства.	2
7.	Метод интервалов для рациональных неравенств.	2
8	Метод замены множителей.	2
	Глава III. Методы решения систем уравнений	**6**
9.	Системы алгебраических уравнений.	2
10.	Замена переменных. Однородные системы.	2
11.	Симметрические системы	2
	Глава IV. Уравнения с модулем	**8**
12.	Модуль числа. Свойства модуля.	2
13.	График функции $y = \|x\|$.	2
14.	Методы решения уравнений с модулем.	2
15.	Решение комбинированных уравнений содержащих переменную и переменную под знаком модуля.	2
	Глава V. Неравенства с модулем	**5**
16.	Теорема о равносильности неравенства с модулем и рационального неравенства.	2
17.	Основные методы решения неравенств с модулем.	2
18.	Решение задач из сборников ЕГЭ	2
	Итого:	**34**
	11 класс	
	Глава I. Уравнения с параметрами	**4**
1.	Понятие уравнения с параметром, примеры.	1
2.	Контрольные значения параметра.	1
3.	Основные методы решения уравнений с параметром.	1
4.	Линейные уравнения с параметром.	1
	Глава II. Неравенства с параметрами	**3**
5.	Понятие неравенства с параметром, примеры.	1
6.	Основные методы решения неравенств с параметрами.	1
7.	Линейные неравенства с параметрами.	1
	Глава III. Квадратные уравнения и неравенства с параметрами	**5**
8.	Теорема Виета.	1
9.	Расположение корней квадратного трёхчлена.	1
10.	Алгоритм решения уравнений.	1
11.	Аналитический и графический способы.	1
12.	Решение уравнений с нестандартным условием	1
	Глава IV. Тригонометрические уравнения и неравенства	**6**
13.	Метод решения тригонометрических уравнений и неравенств.	2
14.	Отбор корней в тригонометрических уравнениях.	2
15.	Примеры систем тригонометрических уравнений.	1

16.	Уравнения и неравенства, содержащие обратные тригонометрические функции.	1
	Глава V. Иррациональные уравнения и неравенства	**5**
17.	Методы решения иррациональных уравнений и неравенств (возведение в степень, замена переменных).	5
	Глава VI. Логарифмические уравнения и неравенства	**6**
18.	Методы решения показательных и логарифмических уравнений	1
19.	Преобразования логарифмических уравнений.	1
20.	Замена переменных в уравнениях.	1
21.	Логарифмирование.	1
22.	Показательные и логарифмические неравенства.	1
23.	Методы решений показательных и логарифмических неравенств (метод замены переменных, метод замены множителей).	1
	Глава VII. Задачи с параметрами	**5**
24.	Решение задач из сборников ЕГЭ	5
	Итого:	**34**
	Всего количество часов:	**68**

Планируемые результаты освоения учебного предмета

В результате изучения данного курса учащиеся:

должны знать:

- общие сведения об уравнениях с параметрами, неравенствах и их системах;
- методы решения неравенств и систем уравнений;
- основные приёмы и методы решения: уравнений и неравенств с модулем и параметрами;
- линейных, квадратных уравнений и неравенств с параметрами;
- иррациональных,
- тригонометрических,
- показательных,
- логарифмических уравнений и неравенств, в том числе с параметрами.

должны уметь:

- применять изученные методы и приемы при решении уравнений и неравенств;
- проводить исследования при решении уравнений и неравенств с параметрами.

Приложение 1. **Оценочные материалы**

Проверочные работы

Проверочная работа № 1 по теме

«Основные понятия. Уравнения и неравенства с параметром»

1. Решить уравнение:

а) $(x-a)\sqrt{x+a}=0$

б) $(x-a)\sqrt{x^2-1}=0$

в) $\sqrt{a^2-x^2}=1-x$

г) $\sqrt{ax}=1+x$

2. Решить неравенство:

а) $x^2+ax+1>0$

б) $|x-a|\geq x$

в) $\frac{x-\left(1+2^{1-a^2}\right)}{x^2-2x-8}<0$

3. Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$5^{2x}-10x+(a-2)\cdot 4^{x-1}=0$ имеет единственный корень.

Ответы к работе:

1. Решить уравнение:

а) Если $a\leq 0$, то $x=-a$. Если $a>0$, то $x=a$ или $x=-a$.

б) Если $|a|>1$, то $x\in\{a;-1;1\}$. Если $|a|\leq 1$, то $x\in\{1;-1\}$.

в) Если $\frac{1}{\sqrt{2}}\leq|a|\leq 1$, то $x=\frac{1\pm\sqrt{2a^2-1}}{2}$. Если $|a|>1$, то $x=\frac{1-\sqrt{2a^2-1}}{2}$. При $|a|<\frac{1}{\sqrt{2}}$ корней нет.

г) Если $a\leq 0$, то $x=\frac{a-2+\sqrt{a^2-4a}}{2}$. Если $a\geq 4$, то $x=\frac{a-2\pm\sqrt{a^2-4a}}{2}$.

При $a\in(0;4)$ корней нет.

2. Решить неравенство:

а) Если $|a|\geq 2$, то $x\in\left(-\infty;\frac{1}{2}\left(-a-\sqrt{a^2-4}\right)\right)\cup\left(\frac{1}{2}\left(-a-\sqrt{a^2-4}\right);+\infty\right)$.

Если $|a|<2$, то $x\in R$.

б) Если $a \le 0$, то x – любое. Если $a > 0$, то $x \le \frac{a}{2}$.

в) $x \in (-\infty; -2) \cup \left(1 + 2^{1-a^2}; 4\right)$

1. Уравнение имеет единственный корень при $a \in (-\infty; -2) \cup \{3\}$.

Проверочная работа № 2 по теме

«Графическая интерпретация задач с параметром»

1. Дано уравнение $x^2 + (a + 1)x - 3 = 0$

а) Решите уравнение аналитически.

б) Проверьте ответ с помощью геометрической интерпретации с использованием плоскости «переменная – значение».

в) Проверьте ответ с помощью геометрической интерпретации с использованием плоскости «переменная – параметр».

2. Дано неравенство$|x - a| > x + 1$

а) Решите неравенство аналитически.

б) Проверьте ответ с помощью геометрической интерпретации с использованием плоскости «переменная – значение».

в) Проверьте ответ с помощью геометрической интерпретации с использованием плоскости «переменная – параметр».

3. Найдите все значения a, при которых уравнение $|x - a| - |2x + 2| = 3$ имеет единственный корень.

а) Решите с использованием плоскости «переменная – значение».

б) Решите с использованием плоскости «переменная – параметр».

в) Проверьте решение аналитически.

Ответы к работе:

1. $x_{1;2} = \frac{-(a+1) \pm \sqrt{a^2+2a+13}}{2}$

2. Если $a < -1$, то $x \in (-\infty; +\infty)$. Если $a \ge 1$, то $x \in \left(-\infty; \frac{a-1}{2}\right)$.

3. Если $a < -1$ решение неравенства имеет вид: $\mathrm{x} \in \left(-\infty; \frac{\mathrm{a}-1}{2}\right)$

Если $a \geq -1$ неравенство решения не имеет.

Проверочная работа № 3 по теме
«Задачи с параметром»

1. Найти все значения параметра a, для каждого из которых существует только одно значение x, удовлетворяющее системе:

$$\begin{cases} |x^2 - 7x + 6| + x^2 + 5x + 6 - 12|x| = 0 \\ x^2 - 2(a-2)x + a(a-4) = 0 \end{cases}$$

2. Решить уравнение:

а) $2\sin^2 x - (2a+1)\sin x + a = 0$

б) $3\lg^2(x-a) - 10\lg(x-a) + 3 = 0$

3. Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$(x+a)\left(\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$ имеет единственное решение на отрезке $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{3\pi}{2}\right)$

4. При каких значениях параметра a каждое решение неравенства $0{,}4^{x^2+1} > 6{,}25^{a-3x}$ является решением неравенства $x^2 - 6x + 4 < a^2$?

5. При каких значениях параметра a система $\begin{cases} \log_x y = 1 \\ y = x^2 - 7x - a \end{cases}$ имеет два различных решения?

Ответы к работе:

1. $a \in \{-3\} \cup \{-2\} \cup (1;2) \cup (2;5)(6;10]$

2. Решить уравнение:

а) Если $|a| \leq 1$, то $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n;\ \ x = (-1)^k \arcsin a + \pi k,\ n, k \in Z$

Если $a \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$, то $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$

б) $x_1 = a + 10^3;\ x_1 = a + \sqrt[3]{10},\ a \in R$

3. $a \in \left(-\infty; -\frac{3\pi}{2}\right) \cup \left\{-\frac{4\pi}{3}\right\} \cup \left(-\frac{\pi}{6}; +\infty\right)$

4. $a \in (-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$

5. $a \in (-16; -7) \cup (-7; 0)$

Итоговая работа

1. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x) = 4x^2 + 4ax + a^2 - 2a + 2$ на множестве $|x| \geq 1$ не менее 6.
2. Найдите все значения параметра a, при которых система $\begin{cases} a^2 - x^2 + 2x - 2a \leq 0 \\ x^2 = 4x - a \end{cases}$ имеет ровно одно решение.
3. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $x^2 + (1-a)^2 = |x - 1 + a| + |x - a + 1|$ имеет единственный корень.
4. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\left|\frac{5}{x} - 4\right| = ax - 1$ на промежутке $(0; +\infty)$ имеет более двух корней.
5. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $(|x+2| + |x-a|)^2 - 5(|x+2| + |x-a|) + 3a(5-3a) = 0$ имеет ровно два решения.

Ответы к итоговой работе:

1. $a \in (-\infty; -2) \cup \{0\} \cup \left(7 + \sqrt{17}; +\infty\right)$
2. $a \in \left[\frac{-1-\sqrt{17}}{2}; 0\right) \cup \left[\frac{\sqrt{17}-1}{2}; 3\right]$
3. $a \in \{-1\} \cup \{3\}$
4. $a \in (0{,}8; 1{,}25)$
5. $a \in (-\infty; 0{,}75) \cup (1; +\infty)$

Дидактический материал

Тема «Основные понятия. Уравнения и неравенства с параметром»

1. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$x^2 + (a-3)^2 = |x+3-a| + |x+a-3|$$

имеет единственный корень.

Ответ: $1; 5.$

2. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$(|x+7| - |x-a|)^2 - 13a(|x+7| - |x-a|) + 30a^2 + 21a - 9 = 0$$

имеет ровно два решения.

Ответ: $\left(-\frac{4}{11}; \frac{6}{7}\right) \cup \left(\frac{6}{7}; \frac{10}{9}\right)$

3. Найдите все значения параметра a при каждом из которых уравнение

$$|(x-1)^2 - 2^{1-a}| + |x-1| + (1-x)^2 + 2^{a-1} = 4 + 4^a$$

имеет единственное решение. Найдите это решение для каждого значения a.

Ответ: при $a = -1$ *единственное решение* $x = 1$

4. Найдите все значения параметра a, при которых любое число из отрезка $2 \le x \le 3$ является решением уравнения $|x-a-2| + |x+a+3| = 2a + 5$

Ответ: $a \ge 1$.

5. Найдите все значения параметра a при которых уравнение

$$(|x+2| + |x-a|)^2 - 5(|x+2| + |x-a|) + 3a(5-3a) = 0$$

имеет ровно два решения.

Ответ: $\left(-\infty; \frac{3}{4}\right) \cup (1; +\infty)$

Тема «Графическая интерпретация задач с параметром»

1. Для каждого параметра определить количество корней уравнения

$$\sqrt{1-x^2} = a - x$$

Ответ:

✓ $a \in (-\infty; -1]$ *решений нет*

- ✓ $a \in (-1; 1)$ *одно решение*
- ✓ $a \in [1; 2)$ *два решения*
- ✓ *при* $a = 2$ *одно решение*
- ✓ $a \in (2; +\infty)$ *решений нет*

2. Для каждого параметра найти корни уравнения $\sqrt{x^2 - 1} = a - x$.

   Ответ: $a \in [-1; 0) \cup [1; +\infty)$ *одно решение* $x = \frac{a^2+1}{2a}$. *При других значениях* a *корней нет.*

3. Для каждого параметра найти корни уравнения $\sqrt{x - a} = 3 - x$.

   Ответ: $a \in (-\infty; 3]$ *одно решение* $x = \frac{7-\sqrt{13-4a}}{2}$. *При других значениях* a *корней нет.*

4. Для каждого параметра найти корни уравнения $x|x + 1| = a$.

   Ответ:
   - ✓ $a \in \left(-\infty; -\frac{1}{4}\right]$ *одно решение* $x = \frac{-1-\sqrt{1-4a}}{2}$
   - ✓ $a \in \left(-\frac{1}{4}; 0\right]$ *три решения* $x = \frac{-1-\sqrt{1-4a}}{2}$; $x = \frac{-1\pm\sqrt{1+4a}}{2}$
   - ✓ $a = 0$ *два решения* $x = -1$; $x = 0$
   - ✓ $a \in (0; +\infty)$ *одно решение* $x = \frac{-1+\sqrt{1+4a}}{2}$

5. Для каждого параметра найти корни уравнения $x|x + 1| = a$

   Ответ:
   - ✓ $a \in (-\infty; -1) \cup [1; +\infty)$ *одно решение* $x = \frac{2}{1+a}$
   - ✓ $a = 0$ *одно решение* $x = 2$
   - ✓ $a \in (0; 1)$ *два решения* $x = \frac{2}{1-a}$; $x = \frac{2}{1+a}$
   - ✓ *при других значениях* a *корней нет.*

Тема «Задачи с параметром»

1. Найти все значения параметра a, при каждом из которых множество значений функции $y = \frac{a-3x+ax}{x^2-2ax+a^2+1}$ содержит отрезок $[0; 1]$

   Ответ: $a \leq \frac{7-2\sqrt{6}}{5}$; $\frac{7+2\sqrt{6}}{5} \leq a < 3; a > 3$

2. Найти все значения a, при каждом из которых функция $f(x) = x^2 - 4|x - a^2| - 8x$ имеет более двух точек экстремума.

   Ответ: $a \in [-12; -1] \cup \left[\frac{29-\sqrt{793}}{2}; \frac{29+\sqrt{793}}{2}\right]$

3. Найти все такие значения параметра a, при каждом из которых уравнение $(1 + \sin x)^4 - 7\sin x = 7 - a - a^2$ не имеет решений.

$Ответ: a < -3;\ \ a > 2$

4. Найти все такие значения параметра a, при каждом из которых уравнение $(4x - x^2)^2 - 32\sqrt{4x - x^2} = 4a^2 - 12a$ имеет хотя бы одно решение.

   $Ответ: a \in [0; 3]$

5. Найти все значения a, при которых уравнение

   $(\log_2(x + a) - \log_2(x - a))^2 - 3a(\log_2(x + a) - \log_2(x - a)) + 2a^2 - a - 1 = 0$

   имеет ровно два решения.

   $Ответ: a \in (-\infty; -2) \cup \left(-2; -\frac{1}{2}\right) \cup (1; +\infty)$

Приложение 2. **Методические материалы**

Практические и методические вопросы «Решение задач с параметрами»

Введение.

Большинство жизненных задач решаются как алгебраические уравнения: приведением их к самому простому виду.

Толстой Л. Н. “Круг чтения”.

Толковый словарь определяет параметр как величину, характеризующую какое - нибудь основное свойство машины, устройства, системы или явления, процесса. (*Ожегов С.И.* , *Шведова Н.Ю.* Толковый словарь русского языка. Москва. 1999). Рассмотрение параметров - это всегда выбор. Покупая какую-то вещь, мы внимательно изучаем ее основные характеристики. Перед выбором мы стоим и в различных жизненных ситуациях.

Изучение многих физических процессов и геометрических закономерностей часто приводит к решению задач с параметрами. Решение задач с параметрами можно считать деятельностью, близкой по своему значению к исследовательской. Это обусловлено тем, что выбор метода решения, процесс решения, запись ответа предполагают определённый уровень сформированности умений наблюдать, сравнивать, анализировать, выдвигать и проверять гипотезу, обобщать полученные результаты.

- уравнения и их системы, которые необходимо решить либо для любого значения параметра, либо для значений параметра, принадлежащих заранее оговоренному множеству;
- уравнения и их системы, для которых требуется определить количество решений в зависимости от значения параметра;
- уравнения и их системы, для которых требуется найти все те значения параметра, при которых указанные уравнения и их системы имеют заданное число решений.

1. Аналитический способ решения задач с параметрами.

Задачи с параметрами встречаются фактически с самого начала изучения математики, когда начинают оперировать с буквами, как с числами. Они связаны с решением уравнений и неравенств, в запись которых наряду с переменными входят буквы, называемые параметрами.

Предполагается, что эти параметры могут принимать любые числовые значения, т.е. одно уравнение с параметром задает множество уравнений.

Решить уравнение с параметрами означает следующее:

- исследовать, при каких значениях параметров уравнение имеет корни и сколько их при разных значениях параметров;
- найти все выражения для корней и указать для каждого из них те значения параметров, при которых это выражение действительно определяет корень уравнения.

1.1. Линейные уравнения с одной переменной, содержащие параметр.

Уравнение вида ах + в = 0, где а и в – некоторые постоянные, называется линейным уравнением.

Если а$\neq$ 0, то линейное уравнение имеет единственный корень: х=$\frac{-в}{а}$.

Если а=0 и в=0, переписав исходное уравнение в виде ах=-в, легко видеть, что любое х является решением линейного уравнения.
Если а=0 и в$\neq$ 0, то линейное уравнение не имеет корней.

Пример 1. Решить уравнение с параметром:

1) ах=0.
Решение. Если а=0, то $0\cdot$х=0; х - любое действительное число.
Если а$\neq$ 0, то х = $\frac{0}{a}$ = 0.
Ответ: если а=0, х - любое действительное число;
если а$\neq$ 0, то х = 0.

2) х + 2 = ах.
Решение. Преобразуем данное уравнение к виду х(1-а) = -2.
Если 1-а =0,т.е. а=1, то получим уравнение х$\cdot$0=-2, которое не имеет корней.
Если 1-а$\neq$ 0,т.е. а$\neq$ 1, то уравнение имеет единственный корень х=$\frac{2}{a-1}$.
Ответ: если а$\neq$ 1, то х=$\frac{2}{a-1}$;
если а=1,то уравнение не имеет корней.
3) (а^2 -1)х=2 а^2 + а -3.
Решение. Приведем данное уравнение к виду (а-1)(а+1)х=(2а+3)(а-1).
Если а=1, то уравнение принимает вид $0\cdot$х=0, его решением является любое действительное число.
Если а=-1, то уравнение принимает вид $0\cdot$х=-2, это уравнение не имеет решений.
Если а$\neq$ ± 1, то уравнение имеет единственное решение х= $\frac{2a+3}{a+1}$.
Это значит, что каждому допустимому значению а соответствует единственное значение х.
Ответ: если а=1, то х- любое действительное число;
если а=-1, то уравнение не имеет решений;
если а$\neq$ ± 1, то х=$\frac{2a+3}{a+1}$.

<u>Пример 2</u>. Решить относительно x уравнение

$$\frac{3ax-5}{(a-1)(x+3)}+\frac{3a-11}{a-1}=\frac{2x+7}{x+3}.$$

Решение. Из условия следует, что (a-1)(x+3)$\neq$0, т.е. a$\neq$1, x$\neq$-3.
Умножив обе части данного уравнения на (a-1)(x+3), получим уравнение 3ax-5+ (3a-11)(x+3)=(2x+7)(a-1), или x(4a-9)=31-2a.

При a$\neq$2,25 x=$\frac{31-2a}{4a-9}$.

Теперь необходимо проверить, нет ли таких значений a, при которых найденное значение x=-3.

$\frac{31-2a}{4a-9}$=-3 при a=-0,4.

Таким образом, при a$\neq$2,25, a$\neq$1 и a$\neq$-0,4 данное уравнение имеет единственное решение x=$\frac{31-2a}{4a-9}$.

При a=2,25, a=-0,4 и a=1 уравнение решений не имеет.

Замечание: если при каком-либо значении параметра данное уравнение не имеет смысла, то оно при этом значении параметра и не имеет решения. Обратное утверждение не верно.

Ответ: если a$\neq$2,25, a$\neq$1 и a$\neq$-0,4, то x=$\frac{31-2a}{4a-9}$;

если a=2,25, a=-0,4 и a=1,то уравнение решений не имеет.

<u>Пример 3</u>. При каких значениях параметра a уравнение имеет бесконечное множество решений?

6(ax-1)-a=2(a+x)-7.

Решение. Приведем данное уравнение к виду 2x(3a-1)=3a -1.

Если 3a-1$\neq$0,т.е. a$\neq\frac{1}{3}$, то x=$\frac{1}{2}$.

Если 3a-1=0, т.е. a=$\frac{1}{3}$, то уравнение примет вид 2x$\cdot$0=0, его решением является любое число.

Ответ: уравнение имеет бесконечное множество решений при a=$\frac{1}{3}$.

<u>Пример 4</u>. При каких значениях параметра a уравнение не имеет решений?

$\frac{8+5x}{2-x}$=2a.

Приведем данное уравнение к виду x(5+2a)=4a-8.

Если 5+2a $\neq 0$,т.е. a $\neq -\frac{5}{2}$, то x=$\frac{4a-8}{5+2a}$.

Если 5+2a =0,т.е. a =$-\frac{5}{2}$, то уравнение примет вид $x \cdot 0=-18$, это уравнение не имеет решений.

Ответ. уравнение не имеет решений при a =$-\frac{5}{2}$.

1.2. Квадратные уравнения, содержащие параметр.

Уравнение вида $ax^2+вx+c=0$, где a,в,c –некоторые числа ($a \neq 0$), x-переменная, называется квадратным уравнением.

Для решения квадратного уравнения следует вычислить дискриминант

$D= b^2-4ac$.

Если D=0, то квадратное уравнение имеет единственный корень:

$x=-\frac{в}{2a}$ (или два, но сливающихся корня $x_1=x_2$).

Если D>0, то квадратное уравнение имеет два корня:

$x_1 = \frac{-в+\sqrt{D}}{2a}$; $x_2 = \frac{-в-\sqrt{D}}{2a}$.

Если D<0, то квадратное уравнение не имеет корней.

Если один из коэффициентов в или с равен нулю, то квадратное уравнение можно решать, не вычисляя дискриминанта:

1. в=0, с $\neq$ 0; $\frac{c}{a}<0$, то $x_{1,2}= \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$.

2. в $\neq$ 0, с=0, то $x_1=0$, $x_2=-\frac{в}{a}$.

Следующие теоремы также помогают при решении квадратных уравнений с параметрами.

<u>Теорема Виета</u> (прямая) утверждает: если x_1 и x_2 являются корнями квадратного уравнения $ax^2+вx+c=0$, то выполняются соотношения:

$x_1+x_2=-\frac{в}{a}$ и $x_1 \cdot x_2=\frac{c}{a}$.

<u>Обратная теорема</u> утверждает: если для некоторых постоянных a, в, c существуют числа x_1 и x_2, удовлетворяющие соотношениям

$x_1+x_2=-\frac{в}{a}$ и $x_1 \cdot x_2=\frac{c}{a}$, то эти числа x_1 и x_2 являются корнями уравнения $ax^2+вx+c=0$.

<u>Пример 5</u>. Решить относительно x:

$ax^2-2x+4=0$

Если a=0, тогда уравнение примет вид -2x+4=0, отсюда x=2.
Если $a \neq 0$, то D=4-16a.

Если 4-16a≥0, т.е $a \leq \frac{1}{4}$, $x_{1,2}=\frac{1 \pm \sqrt{1-4a}}{a}$

Если 4-16a<0, т.е. $a>\frac{1}{4}$, то уравнение не имеет решений.

Ответ: если a=0, то x=2;

если $a \neq 0$ и $a \leq \frac{1}{4}$, то уравнение имеет два решения $x_{1,2}=\frac{1 \pm \sqrt{1-4a}}{a}$

если $a \neq 0$ и $a>\frac{1}{4}$, то уравнение не имеет решений.

<u>Пример 6</u>. При каких значениях а уравнение $ax^2-x+3=0$ имеет единственное решение?

Если a=0, тогда уравнение примет вид –x+3=0, отсюда x=3.
Если $a \neq 0$, то D=1-12a.
Уравнение будет иметь единственное решение при D=0.

1-12a=0, отсюда $a=\frac{1}{12}$.

Ответ: уравнение имеет единственное решение при a=0 или $a=\frac{1}{12}$.

<u>Пример 7.</u> При каких значениях а уравнение $ax^2+4x+a+3=0$ имеет более одного корня?

Если a=0, то уравнение примет вид 4x+3=0, которое имеет единственный корень, что не удовлетворяет условию задачи.
Если $a \neq 0$, то $D=16-4a^2-12a$.
Уравнение имеет более одного корня при D>0.

$16-4a^2-12a>0$.
Рассмотрим функцию $y=16-4a^2-12a$.

Найдем нули этой функции, решая уравнение $16-4a^2-12a=0$.
$a_1=-4$; $a_2=1$.
Функция принимает положительные значения, если $-4<a<1$.
Ответ: уравнение имеет более одного корня, если $-4<a<0$ и $0<a<1$.

Пример 8. Найти коэффициент а, если корни уравнения $x^2-2x+a=0$. связаны соотношением $2x_1+x_2=3$.
$x^2-2x+a=0$.
По теореме Виета $x_1+x_2=a$ и $x_1 \cdot x_2=2$.
Составляю систему:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3, \\ x_1 + \ \ x_2 = 2. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаю, что $x_1=1$, $x_2=1$.
Тогда $a=1$.
Ответ: $a=1$.

1.3. Системы линейных уравнений с параметром.

Системы линейных уравнений вида

$$\begin{cases} a_1x + в_1 y = c_1 \\ a_2x + в_2 y = c_2 \end{cases}$$

1) имеют единственное решение, если $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{в_1}{в_2}$;

2) не имеют решений, если $\frac{a_1}{a_2} = \frac{в_1}{в_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$;

3) имеют бесконечное множество решений, если $\frac{a_1}{a_2} = \frac{в_1}{в_2} = \frac{c_1}{c_2}$.

Пример 9. Найти все значения параметра а, при котором система имеет бесконечное множество решений:

$$\begin{cases} (a+1)x + 8y = 4a, \\ ax + (a+3)y = 3a - 1. \end{cases}$$

Система имеет бесконечное множество решений, если выполняется условие:

$\frac{a+1}{a} = \frac{8}{a+3} = \frac{4a}{3a-1}$.

1) $\frac{a+1}{a} = \frac{8}{a+3}$;

ОДЗ: $a \neq 0$, $a \neq -3$.
$(a+1)(a+3)=8a$, отсюда $a^2-4a+3=0$.

$D>0$, $a_1=1$ и $a_2=3$. Оба значения входят в область допустимых значений.

2) $\frac{8}{a+3} = \frac{4a}{3a-1}$;

ОДЗ: $a \neq \frac{1}{3}$; $a \neq -3$.
$4a(a+3)=8(3a-1)$, отсюда $a^2-3a+2=0$.

$D>0$, $a_1=2$ и $a_2=1$. Оба значения входят в область допустимых значений.

3) $\frac{a+1}{a} = \frac{4a}{3a-1}$;

ОДЗ: $a \neq \frac{1}{3}$; $a \neq 0$.
$4a^2=(a+1)(3a-1)$, отсюда $a^2-2a+1=0$, $(a-1)^2=0$, $a=1$.

Ответ: при $a=1$ система имеет бесконечное множество решений.

<u>Пример 10.</u> При каких m и n система
а) имеет единственное решение;
б) не имеет решений.

$$\begin{cases} 10x + my = n, \\ 5x + 3y = 4. \end{cases}$$

а) система имеет единственное решение, если $\frac{10}{5} \neq \frac{m}{3}$;
Это условие выполняется при $m \neq 6$.

б) система не имеет решений, если $\frac{10}{5} = \frac{m}{3} \neq \frac{n}{4}$;

1) $\frac{10}{5}=\frac{m}{3}$, отсюда m=6.

2) $\frac{10}{5}\neq\frac{n}{4}$, отсюда $n\neq 8$.

3) $\frac{m}{3}\neq\frac{n}{4}$, отсюда $n\neq\frac{4m}{3}$; т.е. при m=6 $n\neq 8$.

Ответ: а) при $m\neq 6$ система имеет единственное решение;

б) при m=6 и $n\neq 8$ система не имеет решений.

2.Применение графического способа при решении задач с параметрами.

Пример 11. Решить уравнение x^2-4x+2=a.

Рассмотрим функцию $y_1= x^2-4x+2$, графиком которой является парабола, ветви направлены вверх. Для удобства построения выделим полный квадрат $y=(x-2)^2-2$. Вершиной параболы является точка с координатами (2;-2).

Рассмотрим функцию y_2=a. Графиком этой функции является прямая, параллельная оси OX.

Так как параметр содержится в уравнении прямой, то решение уравнения будет зависеть от расположения данной прямой. Построим графики рассматриваемых функций: $y_1= x^2-4x+2$ и y_2=a.

По графикам построенных функций можно сделать следующий вывод:

при a<-2 уравнение не имеет корней;

при a=-2 уравнение имеет единственный корень, x=2;

при a>-2 уравнение имеет два корня.

При графическом способе решения данного уравнения мы легко определили количество корней в зависимости от значения a. Однако не всегда удается найти их аналитическое значение, как в случае при a>-2.

Найдем значение этих корней аналитическим способом.

Если a>-2, то D > 0.

Находим корни по формуле: $x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{4a+8}}{2}$

$$x_{1,2}=2\pm\sqrt{a+2}$$

Ответ: если a<-2, то уравнение не имеет корней;

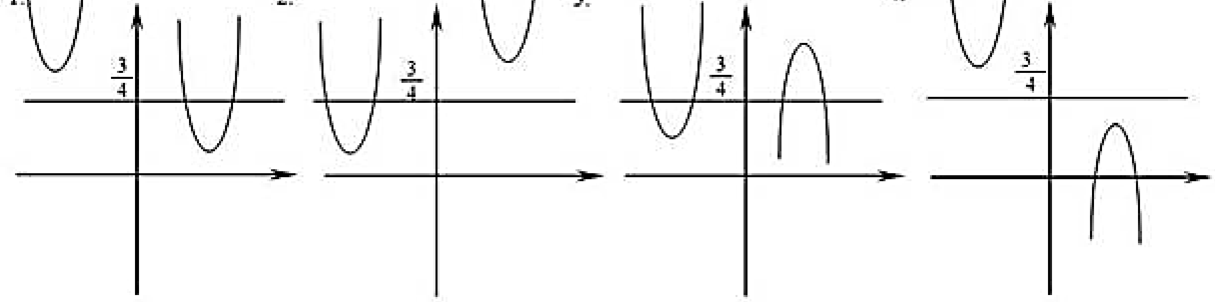
если a=-2, то x=2;

если a>-2, то $x_{1,2}=2\pm\sqrt{a+2}$.

<u>Пример12</u> . Найти все значения параметра a, для которых вершины парабол $y_1= x^2-2(a+1)x+1$ и $y_2= ax^2-x+a$ лежат по разные стороны от прямой $y=\frac{3}{4}$.

Решение данной задачи начнем с анализа графической модели.

Рассмотрим функцию $y_1= x^2-2(a+1)x+1$, графиком которой является парабола, ветви направлены вверх. Графиком функции $y_2= ax^2-x+a$ является парабола, направление ветвей которой будет зависеть от значения параметра a.
Согласно условию задачи схематично можно изобразить четыре возможных варианта:



Найдем координаты вершин парабол:

$x_{в1}$=a+1; $y_{в1}$=1-(a+1)^2.

$x_{в2}=\frac{1}{2a}$; $y_{в2}$= 4a2-14a.

Согласно схематичным чертежам записываем четыре системы неравенств:

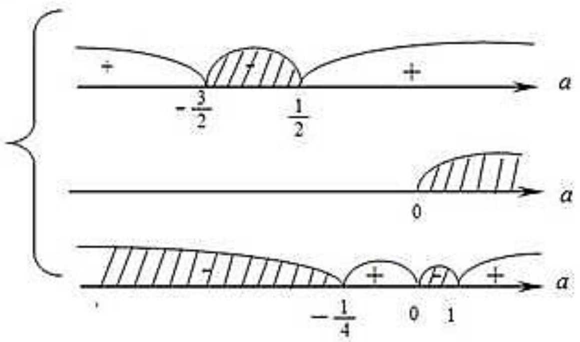
$$1.\begin{cases} y_{в1} > \frac{3}{4}, \\ a > 0, \\ y_{в2} < \frac{3}{4}. \end{cases} \qquad 2.\begin{cases} y_{в1} < \frac{3}{4}, \\ a > 0, \\ y_{в2} > \frac{3}{4}. \end{cases} \qquad 3.\begin{cases} y_{в1} < \frac{3}{4}, \\ a < 0, \\ y_{в2} > \frac{3}{4}. \end{cases} \qquad 4.\begin{cases} y_{в1} > \frac{3}{4}, \\ a < 0, \\ y_{в2} < \frac{3}{4}. \end{cases}$$

Рассмотрим более подробно решение первой системы . Преобразование остальных систем аналогично , отличается только знаками:

$$1.\begin{cases} -(a+1)^2 > \frac{3}{4}, \\ a > 0, \\ \frac{4a^2-1}{4a} < \frac{3}{4}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -(a+1)^2 > -\frac{1}{4}, \\ a > 0, \\ \frac{4a^2-1}{a} - 3 < 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a+1)^2 - \frac{1}{4} < 0, \\ a > 0, \\ \frac{4a^2-3a-1}{a} < 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(a+1-\frac{1}{2}\right)\left(a+1+\frac{1}{2}\right) < 0, \\ a > 0, \\ \frac{4(a-1)\left(a+\frac{1}{4}\right)}{a} < 0. \end{cases}$$

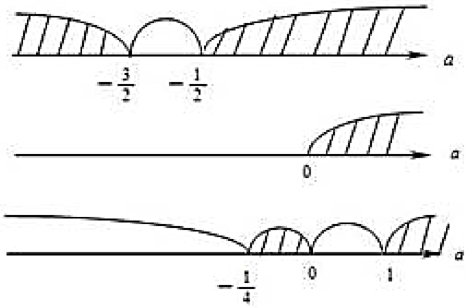
Рационально далее решить систему методом интервалов:

1



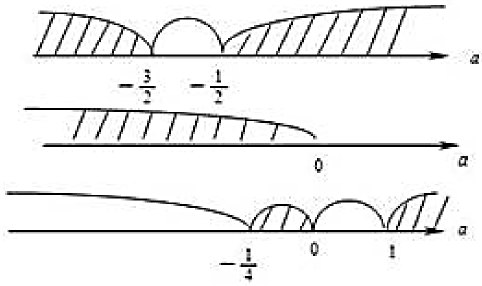
Система решений не имеет.

2. $\begin{cases} \left(a+\frac{1}{2}\right)\left(a+\frac{3}{2}\right)>0, \\ a>0, \\ \dfrac{4(a-1)\left(a+\frac{1}{4}\right)}{a}>0. \end{cases}$



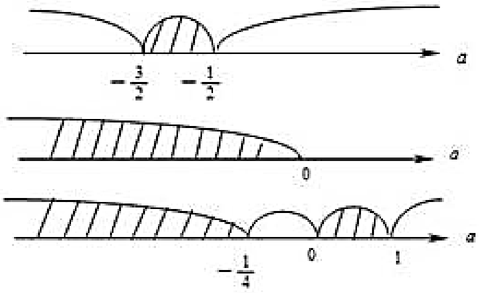
$a\in(-1;+\infty)$

3. $\begin{cases} \left(a+\frac{1}{2}\right)\left(a+\frac{3}{2}\right)>0, \\ a<0 \\ \dfrac{4(a-1)\left(a+\frac{1}{4}\right)}{a}>0. \end{cases}$



$a\in\left(-\frac{1}{4};0\right)$

4. $\begin{cases} \left(a+\frac{1}{2}\right)\left(a+\frac{3}{2}\right)<0, \\ a<0, \\ \dfrac{4(a-1)\left(a+\frac{1}{4}\right)}{a}<0. \end{cases}$



$a\in\left(-\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right).$

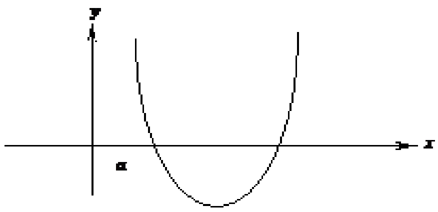
Объединяя решения систем получаем ответ:

$a\in\left(-\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{4};0\right)\cup(1;+\infty).$

<u>Пример 13.</u> Найти все значения параметра а, при которых корни уравнения $x^2+x+a=0$ действительные, различные и оба больше а.

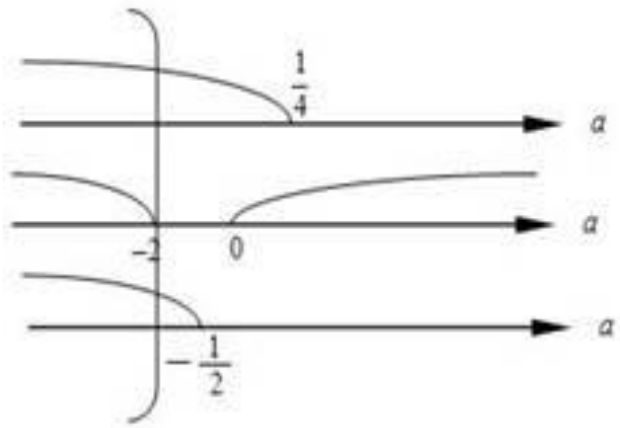
Рассмотрим функцию $y=x^2+x+a$, графиком которой является парабола. Ветви параболы направлены вверх. Абсцисса вершины параболы $x_в=-\frac{1}{2}$.

Графическая интерпретация данной задачи:



По условию задачи уравнение имеет два различных действительных корня, которые одновременно больше а, тогда и только тогда, когда:

D>0,fa>0,xв>a;⇒ D>0,fa>0,xв>a;



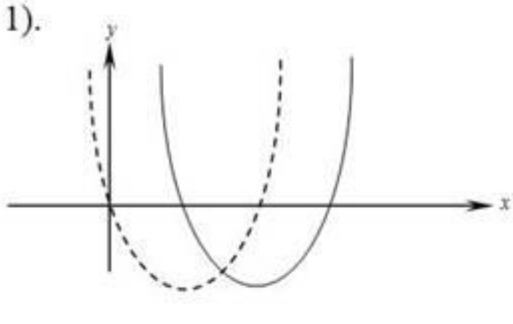
Ответ: (-∞; -2).

Пример 14. Найти все значения параметра а, при которых корни уравнения $ax^2+2(a+3)x+a+2=0$ неотрицательны.

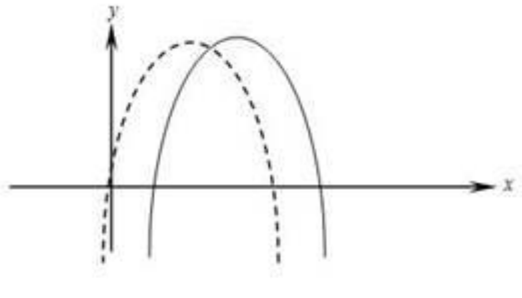
Корни уравнения неотрицательны, значит они могут принимать значения больше либо равные нулю, не сказано, что корни различны, следовательно это могут быть два совпавших корня.

Графическая интерпретация данной задачи:

1).



2).



Чтобы выполнялось условие задачи, необходимо и достаточно

D≥0,f0≥0,xв>0, a>0. или D≥0,f0≤0,xв>0, a<0.

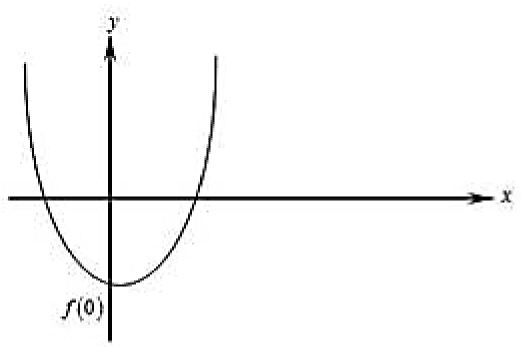
Решая системы методом интервалов, получаем, что решением первой системы является пустое множество, а решением второй системы - -2,25;-2

Ответ: a $\in$ -2,25;-2.

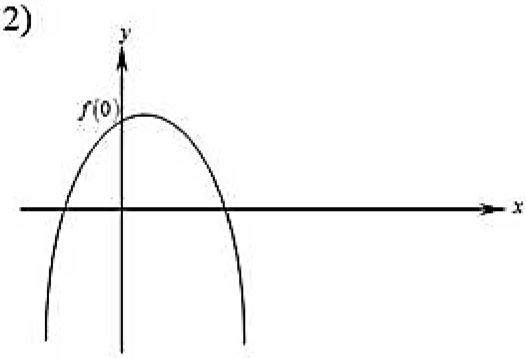
<u>Пример15.</u> Найти все значения параметра a, при которых корни уравнения $ax^2-(a+1)x+a+3=0$ имеют разные знаки.

Для того, чтобы парабола, являющаяся графиком функции $y= ax^2-(a+1)x+a+3$, пересекала ось абсцисс в точках, между которыми располагается начало координат, необходимо и достаточно, чтобы квадратный трехчлен $ax^2-(a+1)x+a+3$ принимал в точке $x = 0$ отрицательное или положительное значение, в зависимости от направления ветвей параболы. Графическая интерпретация данной задачи:

1)



2)



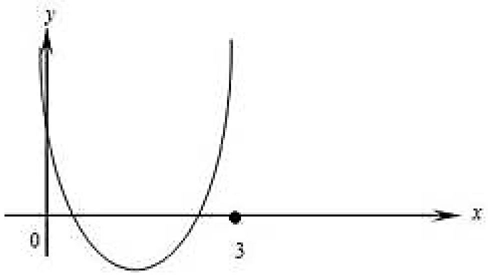
Тогда искомое условие задачи имеет вид:

$$\begin{array}{l} 1)\\ \\ 2) \end{array}\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a>0, \\ f(0)<0. \end{cases} \\ \\ \begin{cases} a<0, \\ f(0)>0. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a>0, \\ (a+3)<0. \end{cases} \\ \\ \begin{cases} a<0, \\ (a+3)>0. \end{cases} \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} a\in\varnothing \\ \\ \\ a\in(-3;0). \end{array}\right.$$

Ответ: a $\in$ (-3;0).

<u>Пример16.</u> При каких значениях параметра a, корни уравнения $x^2-ax+2=0$ принадлежат отрезку $[0;-5]$?

При требуемом условии расположения корней квадратного трехчлена x^2-ax+2 соответствующая парабола располагается следующим образом:



Решение данной задачи определяется условием:

$D\geq0, f0\geq0;\ f3\geq0, 0\leq xв\leq3; \Leftrightarrow a2-8\geq0, 11-3a\geq0, 0\leq a2\leq3.$

Решаем систему методом интервалов, откуда получаем, что а $\in 22;113$.

Ответ: а $\in 22;113$.

Таким образом рассмотрены часто встречающиеся типы уравнений и системы уравнений с параметрами и сделаны следующие выводы:

- при решении многих задач с параметрами удобно воспользоваться геометрическими интерпретациями. Это часто позволяет существенно упростить анализ задач, а в ряде случаев представляет собой единственный «ключ» к решению задачи;
- существенным этапом решения задач с параметрами является запись ответа. Особенно это относится к тем задачам, где решение как бы «ветвится» в зависимости от значения параметра. В подобных случаях составление ответа – это сбор ранее полученных результатов.