ДЕПАРТАМЕНТ ОБРАЗОВАНИЯ
КОМИТЕТА ПО СОЦИАЛЬНОЙ ПОЛИТИКЕ И КУЛЬТУРЕ АДМИНИСТРАЦИИ г. ИРКУТСКА
МУНИЦИПАЛЬНОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ГОРОДА ИРКУТСКА
СРЕДНЯЯ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНАЯ ШКОЛА № 66
(МБОУ г. Иркутска СОШ № 66)

улица Ленская, дом 2 а, г. Иркутск, телефон/факс 34-93-65, телефон 34-93-65
e-mail: school66-admin@mail.ru

Приложение к основной образовательной программе среднего общего образования МБОУ г. Иркутска СОШ № 66	**УТВЕРЖДЕНО** приказом № 228/1 от «30» августа 2017 года Директор МБОУ г. Иркутска СОШ № 66 В.Ф. Федоров _______________

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОГО КУРСА
«Исследование функции элементарными средствами»
для 10 класса
Срок реализации программы 1 год

Составитель программы: Ригус Галина Игоревна, учитель математики МБОУ г. Иркутска СОШ № 66

Иркутск, 2017

Пояснительная записка

Рабочая программа разработана на основе требований к планируемым результатам основной образовательной программы среднего общего образования МБОУ г. Иркутска СОШ №66.

Рабочая программа включает в себя содержание, тематическое планирование, планируемые результаты обучения. Как *приложение 1* к программе включены оценочные материалы, *приложение 2* – методические материалы.

Количество учебных часов, на которые рассчитана программа:

	10 класс	всего
Количество учебных недель	34	34
Количество часов в неделю	1	
Количество часов в год	34	34

Уровень подготовки учащихся: базовый
Место предмета в учебном плане: компонент образовательного учреждения.

В методической схеме развития функциональной линии, общепринятой в современной школе, свойства функции в 7-9 классах устанавливаются по ее графику, т.е. на основе наглядных представлений, чаще всего на конкретных примерах, и лишь немногие устанавливаются аналитически, что частично обосновывается видами рассматриваемых в данный период функций. Однако расширение области изучаемых функций в старших классах, обозначает проблему, заключающуюся в трудностях построения графиков данных видов функций «по отдельным точкам», разрешения которой приводит к тому, что вводятся почти все свойства функций, причем исследование производится посредством аппарата математического анализа.

Таким образом, большой объем информации, перерабатываемый учениками, за весьма небольшой период временной промежуток вызывает у них затруднения и, чаще всего, непонимание смысла выполняемых действий.

Кроме того возникают сложности при изучении функционального метода решения уравнений и неравенств, в том числе и с параметрами, требующего владение базовыми умениями исследования функции элементарными средствами.

Данный курс позволяет внести весомый вклад в разрешение данных проблем.

Кроме того, данный курс выполняет развивающуюся функцию, т.к. имеет огромный потенциал для развития логического мышления учащихся, формирования исследовательских умений. Он создает так же условия для формирования таких ключевых компетенций как: познавательные, коммуникативные и информационные, которые имеют немаловажное значение как для дальнейшего овладения различными видами профильной деятельности, так и для дальнейшей профессиональной деятельности.

Цель курса: овладение аппаратом исследования функции элементарными средствами.

Задачи курса:

- владения знаниями, умениями и навыками исследованиями элементарными средствами;

— развитие исследовательских умений посредством формирования умений исследовать функцию элементарными средствами;
— формирование ответственности за самостоятельный выбор;
— развитее способностей к самопроверке;
— развитие мотивации к собственной учебной деятельности;
— формирование познавательных, коммуникативных и информационных компетенций.

Основные формы реализации учебного процесса

Изучение материала происходит по следующей схеме:

1. Постановка задачи.
2. Изучение посредством пособия учащимися самостоятельно (дома) заданного раздела.
3. Оценка самостоятельной работы учащимися в классе (диалог).
4. Применение полученных знаний.

При таком подходе создаются достаточные условия для осуществления диалога являющегося важнейшей формой личностно – ориентированного обучения. Так как изучив материал самостоятельно субъекты диалогового общения сохраняют интеллектуальное равноправие, обеспечивающие активную деятельность обучаемых, а так же положительную мотивацию.

При этом доминантной формой учения является поисково – исследовательская деятельность учащихся, которая реализуется как при коллективной или при групповой работе, так и в ходе самостоятельной деятельности учащихся. Используются различные формы самостоятельной работы для более эффективного усвоения материала, такие как:

— восстановление пробелов по тексту;
— доведение рассуждений до конца;
— подбор примеров и контрпримеров;
— ответы на вопросы в тексте по мере его изучения;
— ответы на вопросы для самопроверки и т.д..

Критерии успешности прохождения курса

Для того чтобы оценить динамику усвоения учащимися материала, а также поставить учащихся перед необходимостью регулярно заниматься важно с точки зрения психологии предоставить подростку достаточно объективную информацию об уровне его знаний и умений, ожидающий его оценки. В связи с этим ориентироваться на следующие критерии, которые помогут учителю и ученику оценить успешность прохождения данного курса:

1. По мере прохождения программы для организации самоконтроля своей деятельности в каждый последующий раздел включены самостоятельные части, освоение которых обязательно и предполагает овладение материалом изложенным ранее. Таким образом, если возникают затруднения при выполнении того или иного задания, учащимся необходимо вернуться и вновь проработать ранее изложенные вопросы.

2. Объем заданий варьируется по усмотрению учителя в зависимости от уровня подготовленности школьников. Кроме того, ряд заданий дифференцируется по трем уровням сложности, причем уровень сложности определяется самостоятельно, что поможет учащимся оценить свой потенциал с точки зрения

образовательной перспективы, а так же выработки ответственности за индивидуальный выбор.

Необходимо отметить, что динамика к будущему профилю будет фиксироваться в работе следующим образом:

- На подготовительном этапе предполагается ввести входную диагностику, определяющую как субъективную (анкета), так и объективную оценку (тест) возможностей учащихся.
- Использование эффекта не завершенного действия (ряд примеров не решаются, действия заканчивается на этапе анализа задачи, в процессе которого выясняется, что объектом исследования является функция еще пока не знакомая учащимся, и на этапе диалогового общения учитель констатирует, что необходимо получить дополнительные знания).

Основное содержание курса

1. **Вводное занятие.***(1 ч)*

2. **Область определения функции***(1 ч)*
   Определение понятия область значения функции. Нахождение области определения функции, заданной графически. Понятие сложная, составная функция. Приемы исследования функций заданных аналитически.

3. **Область значения функции.** *(4ч)*
   Определение понятия область значения функции. Нахождение области значения функции, заданной графически. Примеры исследования функции, заданной аналитически:

   - использование области значений известных функций;
   - нахождение области определения сложной функции, на основе рассмотрения квадратных функций;
   - путем составления обратной функции;
   - использование теоремы о нахождении области значения функции;
   - использование некоторых опорных неравенств.

4. **Четность (нечетность) функции.***(3ч)*
   Определение понятий четная, нечетная функция, функция общего вида. Исследование функции на четность заданную аналитически. Примеры исследования на четность функций заданных аналитически:

   - по определению;
   - с использованием свойств.

5. **Монотонность функции.***(4 ч)*
   Определение понятий возрастающая функция, убывающая функция, не возрастающая, не убывающая функция. Свойства монотонных функций. Связь четности (нечетности) и монотонности функций. Примеры исследования функции на монотонность:

   - решение неравенства $f(x_1) - f(x_2) > 0$ (по определению);
   - решение неравенства $\frac{f(x_1)}{f(x_{2)}} > 1$;

— прием обобщения;
— применение свойства монотонных функций.

6. **Периодичность функций.** *(2 ч)*
Определение понятия периодическая функция. Свойства периодических функций. Приемы исследования функции на промежутках:
   - прием – по определению;
   - прием – по свойствам.

7. **Выпуклость функции.***(2 ч)*
Введение понятия функция выпукла вниз, функция выпукла вверх. Исследование на выпуклость аналитически заданных функций. Исследование на выпуклость функций заданных графически.

8. **Экстремумы функции.** (2 ч)
Введение понятий точки экстремума, точки максимума, точки минимума, максимум функции, минимум функции. Нахождение экстремальных значений функций $y = f(x)$, для которых уравнение вида $f(x) = a$ сводится к квадратному относительно переменной *x*.

9. **Асимптоты функции.** (4 ч)
Введения понятия асимптоты. Вертикальные асимптоты. Горизонтальные асимптоты. Наклонные асимптоты. Кривые линии, обладающие свойствами асимптот. Приемы отыскания данных видов асимптот.

10. **Знакопостоянство.** (1ч)
Определение понятия промежутки знакопостоянства. Алгоритм отыскания промежутков знакопостоянства.

11. **Наибольшее (наименьшее) значение функции.***(4 ч)*
Понятие наибольшее значение функции, наименьшее значение функции. Приемы нахождения наибольших и наименьших значений функции:

   - нахождение наибольшего и наименьшего значений квадратичной функции;
   - использование некоторых опорных неравенств;
   - применение некоторых вспомогательных утверждений.

12. **Исследование функции в полном объеме.***(4 ч)*
13. **Зачет.***(2 ч)*

Тематическое планирование

№	Содержание	Часы
1	Вводное занятие.	1
2	Область определения функции.	1
3	Область значений функции.	4
4	Четность (нечетность) функции.	3
5	Монотонность функции.	4
6	Периодичность функции.	2
7	Выпуклость функции.	2
8	Экстремумы функции.	2
9	Асимптоты функции.	4

10	Знакопостоянство.	1
11	Наибольшее (наименьшее) значение функции.	4
12	Исследование функции в полном объеме.	4
13	Зачет.	2
	Всего	**34**

Планируемые результаты освоения учебного предмета

Иметь представление:

1. О способах задания функций (аналитически, графически, табличном, словесном и т.д.).
2. О кривых линиях обладающих свойствами асимптот.

Знать:

1. Определение понятий:
   - функция;
   - область определения функции;
   - область значений функции;
   - четная, нечетная функции, функция общего вида;
   - возрастающая функция, убывающая функция, не возрастающая и не убывающая функции;
   - функция выпуклая вверх, функция выпуклая вниз;
   - точки экстремума, точки максимума (минимума), экстремальные значения функции;
   - асимптота графика функции, вертикальная (горизонтальная) асимптота;
   - периодическая функция.
2. Свойства:
   - свойства четных функций;
   - свойства периодических функций;
   - свойства монотонных функций.

Уметь:

1. находить область определения заданных функций графически, аналитически;
2. находить область значения функции заданной графически;
3. применять приемы исследования функций заданных аналитически, таких как:
   - использование области значений известных функций;
   - нахождение области значений сложных функций, на основе рассмотрения квадратных функций;
   - путем составления обратной функции;
   - использование теоремы о нахождении области значения функции;
   - использование некоторых опорных неравенств;
4. исследовать функцию на четность заданную графически;
5. применять приемы исследования функций на четность заданных аналитически, таких как:
   - прием – по определению;
   - прием – по свойствам.
6. применять приемы исследования функций на монотонность заданных аналитически, таких как:
   - решение неравенства $f(x_1) - f(x_2) > 0$ (по определению);

— решение неравенства $\frac{f(x_1)}{f(x_2)} > 1$;
— прием обобщения;
— применение свойства монотонных функций.

7. исследовать функцию на выпуклость заданную аналитически, графически;
8. уметь находить экстремумы функций;
9. уметь определять различные виды асимптот графика функций;
10. определять промежутки знакопостоянства;
11. применять приемы исследования функции на периодичность, таких как:
    — прием – по определению;
    — прием – по свойствам.
12. применять приемы нахождения наибольших и наименьших значений функции, таких как:
    — нахождение наибольшего и наименьшего значения квадратичной функции;
    — использование некоторых опорных неравенств;
    — применение некоторых вспомогательных утверждений.
13. исследовать функцию в полном объеме.

Иметь опыт работы,

направленный на формирование, познавательных, информационных и коммуникативных компетенций:

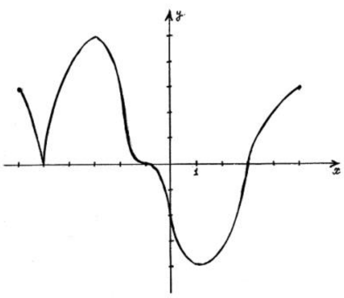
— понимать и интерпретировать тексты;
— выделять основной смысл текста, соотносить его со своим опытом;
— получать информацию и использовать ее для достижения целей и собственного развития;
— осуществлять рефлексию своей деятельности, посредством определения уровня сложности контрольных заданий;
— действовать по алгоритму, а так же составлять алгоритм;
— вести диалог учитывая, сходство и разницу позиций, взаимодействие с партнером для получения общего результата и т. п..

Приложение 1. **ОЦЕНОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ**

Практические работы по теме «Исследование и построение графиков функций»

Вариант 1

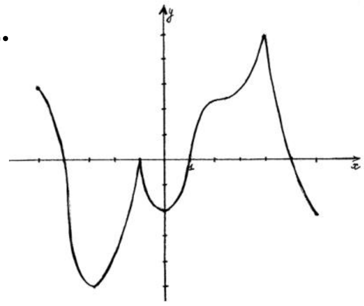
1.



Определить:
а) о.о.ф.;
б) м.з.ф.;

в) нули функции;
г) $f'(x)=0$;
д) экстремумы функции;
е) промежутки возрастания и убывания;
ж) наибольшее и наименьшее значение;
з) x, при которых $f(x)\geq 0$.
и) x, при которых производная не существует.

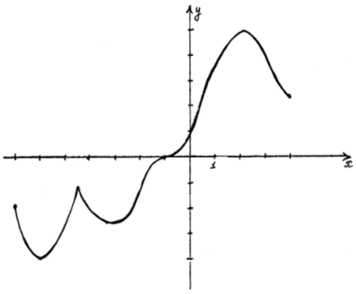
2.



Определить:
а) о.о.ф.;
б) м.з.ф.;
в) нули функции;
г) $f'(x)=0$;
д) экстремумы функции;
е) $f'(x)>0$ и $f'(x)<0$;
ж) наибольшее и наименьшее значение;
з) x, при которых $f(x)\leq 0$;
и) x, в которых касательная || OX.

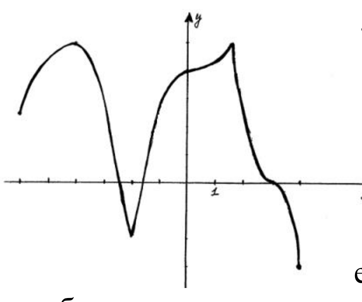
Вариант 2

1.



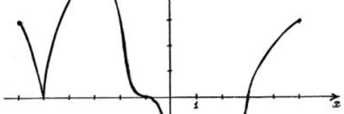
Определить:
а) о.о.ф.;
б) м.з.ф.;
в) нули функции;
г) $f'(x)=0$;
д) экстремумы функции;
е) промежутки возрастания и убывания;
ж) наибольшее и наименьшее значение;
з) x, при которых $f(x)\geq 0$.
и) x, при которых производная не существует.

2.



Определить:
а) о.о.ф.;
б) м.з.ф.;
в) нули функции;
г) $f'(x)=0$;
д) экстремумы функции;
е) $f'(x)>0$ и $f'(x)<0$;
ж) наибольшее и наименьшее значение;
з) x, при которых $f(x)\leq 0$;
и) x, в которых касательная || OX.

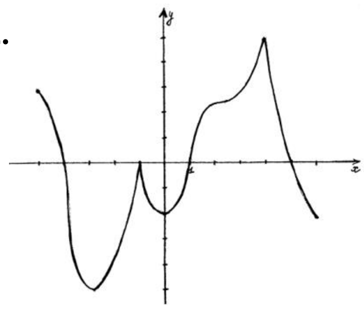
Вариант 1



1.

Определить:
а) о.о.ф.;
б) м.з.ф.;
в) нули функции;
г) $f'(x)=0$;
д) экстремумы функции;
е) промежутки возрастания и убывания;
ж) наибольшее и наименьшее значение;
з) x, при которых $f(x)\geq 0$.
и) x, при которых производная не существует.

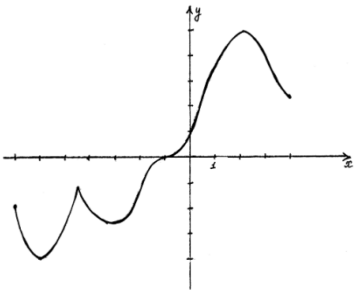
2.



Определить:
а) о.о.ф.;
б) м.з.ф.;
в) нули функции;
г) $f'(x)=0$;
д) экстремумы функции;
е) $f'(x)>0$ и $f'(x)<0$;
ж) наибольшее и наименьшее значение;
з) x, при которых $f(x)\leq 0$;
и) x, в которых касательная || OX.

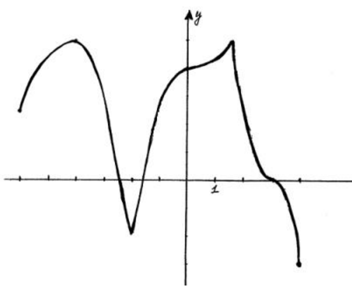
Вариант 2

1.



Определить:
а) о.о.ф.;
б) м.з.ф.;
в) нули функции;
г) $f'(x)=0$;
д) экстремумы функции;
е) промежутки возрастания и убывания;
ж) наибольшее и наименьшее значение;
з) x, при которых $f(x)\geq 0$.
и) x, при которых производная не существует.

2.



Определить:
а) о.о.ф.;
б) м.з.ф.;
в) нули функции;
г) $f'(x)=0$;
д) экстремумы функции;
е) $f'(x)>0$ и $f'(x)<0$;
ж) наибольшее и наименьшее значение;
з) x, при которых $f(x)\leq 0$;
и) x, в которых касательная || OX.

3. Построить график функции по следующим данным:

а) о.о.ф. [-5;4]
б) м.з.ф. [-3;4]
в) нули функции: -4; -2; 2.
г) $f'(x)=0$ в точках -3; 0.
д) $f'(x)>0$ при x (-5;-3),(0;3)
и $f'(x)<0$ при x (-3;0),(3;4).
е) значения функции положительны
при x (-4;-2),(2;4).

4. Построить график функции по следующим данным:
а) о.о.ф. [-4;5]
б) м.з.ф. [-4;4]
в) нули функции: -2; 2.
г) $f'(x)=0$ в точках -2; 2.
д) $f'(x)>0$ при x (0;2),(0;3)
и $f'(x)<0$ при x (-4;0),(2;5).
е) значения функции отрицательны
при x (-2;5).

3. Построить график функции по следующим данным:
а) о.о.ф. [-6;4]
б) м.з.ф. [-4;3]
в) нули функции: -4; 0.
г) $f'(x)=0$ в точках -4; 0; 3.
д) $f'(x)>0$ при x (-4;-2),(3;4)
и $f'(x)<0$ при x (-6;-4),(-2;3).
е) значения функции положительны
при x (-6;0).

4. Построить график функции по следующим данным:
а) о.о.ф. [-4;5]
б) м.з.ф. [-3;4]
в) нули функции: -3; -1; 1; 3.
г) $f'(x)=0$ в точках -2; 0; 2.
д) $f'(x)>0$ при x (-4;-2),(0;1),(2;4)
и $f'(x)<0$ при x (-2;0),(1;2),(4;5).
е) значения функции отрицательны
при x (-4;-3),(-1;3).
3. Построить график функции по следующим данным:
а) о.о.ф. [-5;4]
б) м.з.ф. [-3;4]
в) нули функции: -4; -2; 2.
г) $f'(x)=0$ в точках -3; 0.
д) $f'(x)>0$ при x (-5;-3),(0;3)
и $f'(x)<0$ при x (-3;0),(3;4).
е) значения функции положительны
при x (-4;-2),(2;4).

4. Построить график функции по следующим данным:
а) о.о.ф. [-4;5]
б) м.з.ф. [-4;4]
в) нули функции: -2; 2.

г) $f'(x)$=0 в точках -2; 2.
д) $f'(x)$>0 при x (0;2),(0;3)
 и $f'(x)$<0 при x (-4;0),(2;5).
е) значения функции отрицательны
 при x (-2;5).

3. Построить график функции по следующим данным:
а) о.о.ф. [-6;4]
б) м.з.ф. [-4;3]
в) нули функции: -4; 0.
г) $f'(x)$=0 в точках -4; 0; 3.
д) $f'(x)$>0 при x (-4;-2),(3;4)
 и $f'(x)$<0 при x (-6;-4),(-2;3).
е) значения функции положительны
 при x (-6;0).

4. Построить график функции по следующим данным:
а) о.о.ф. [-4;5]
б) м.з.ф. [-3;4]
в) нули функции: -3; -1; 1; 3.
г) $f'(x)$=0 в точках -2; 0; 2.
д) $f'(x)$>0 при x (-4;-2),(0;1),(2;4)
 и $f'(x)$<0 при x (-2;0),(1;2),(4;5).
е) значения функции отрицательны
 при x (-4;-3),(-1;3).

Самостоятельная работа

Вариант 1

1. Найдите область определения функции:

а) $y = \frac{\sqrt{16-x^2}}{x-2}$;

б) $y = 0{,}5\cos x$;

в) $y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

2. Найдите множество значений функции:

$y = (\cos x - \sin x)^2$.

Вариант 2

1. Найдите область определения функции:

а) $y = \frac{\sqrt{x^2-25}}{x+7}$;

б) $y = 3\sin x$;

в) $y = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

2. Найдите множество значений функции:

$y = (\cos x + \sin x)^2$.

Самостоятельная работа

Вариант 1

1. Функция $f(x)$ периодическая с периодом 8. Запишите вытекающее отсюда равенство.
2. Каков наименьший положительный период функции $y = \operatorname{tg} x$?
3. Является ли число 3,14… периодом синуса?
4. Каков наименьший положительный период функции $y = \cos\frac{x}{2}$?
5. Каков наименьший положительный период функции $y = 5 + \sin x$?

Вариант 2

1. Функция $g(x)$ периодическая с периодом 6. Запишите вытекающее отсюда равенство.
2. Каков наименьший положительный период функции $y = \cos x$?
3. Является ли число 3,14… периодом котангенса?
4. Каков наименьший положительный период функции $y = 6 - \sin x$?
5. Каков наименьший положительный период функции $y = \cos 4x$?

Самостоятельная работа

Вариант 1

1. Докажите, что функция $f(x) = x^4 - 2x^2 - \sin^2 3x$ является четной.
2. Докажите, что функция $f(x) = x^3 + 3x + \sin 2x$ является нечетной.
3. Чему равен наименьший положительный период функции:

а) $f(x) = \sin\frac{2x}{3}$;

б) $f(x) = \cos 7x$;

в) $f(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{3}x + \frac{\pi}{8}\right)$.

Вариант 2

1. Найдите область определения функции $f(\mathrm{x}) = \frac{1}{2\cos 3\mathrm{x}}$.
2. Для функции $\mathrm{y} = \frac{1}{2}\cos 2\mathrm{x}$ найдите область определения и множество значений.
3. Изобразите схематически график функции $\mathrm{y} = \cos\mathrm{x} - 1$.

Вариант 3

1. Исследуйте на четность и нечетность функцию:

а) $f(\mathrm{x}) = \frac{3^2}{4\cos\mathrm{x}}$;

б) $f(\mathrm{x}) = 2\mathrm{x}^2 + 3\,\mathrm{ctg}\,\mathrm{x}$.

2. Найдите область определения функции $\mathrm{y} = 2 - \mathrm{ctg}\,0{,}5\mathrm{x}$.

3. Изобразите схематически график функции $\mathrm{y} = \cos\left(\mathrm{x} + \frac{\pi}{2}\right)$.

<u>Провести полное исследование и построить график функции</u>

1) $y = x^3 - 15x^2 + 36x$

2) $y = \frac{|x|-1}{x^2}$

3) $y = \frac{-1}{2+e^{-x}}$

4) $y = \frac{3x}{x^2-9}$

5) $y = \frac{8x}{(x-2)^2}$

6) $y = \frac{1-x^3}{x^2}$

7) $y = \frac{1}{e^{2x} * 2x}$

8) $y = \frac{2x^2}{4x^2-1}$

9) $y = (1 + x^2)e^x$

10) $y = \frac{x(x+2)}{2x-1}$

11) $y = \frac{x^2+6x-15}{x-2}$

12) $y = \frac{lnx}{x^2}$

13) $y = \frac{4x}{(x+1)^2}$

14) $y = x^3 + 3x^2 - 24x - 8$

15) $y = \frac{2}{x} + x$

16) $y = \frac{x^3}{6(x-2)^2}$

17) $y = xe^{-x^2}$

18) $y = x^4 - 8 * x^2 + 2$

19) $y = \frac{x^3}{4-x^2}$

20) $y = x^3 + 3x$

21) $y = \frac{1-4x}{2x}$

22) $y = \frac{2x^2}{x^3 - 27}$

23) $y = \frac{x(x+2)}{2x-1}$

24) $y = x(x-3)^2$

25) $y = \frac{5x-2}{1-2x}$;

26) $y = \frac{x^2}{3x+5}$

27) $y = \frac{x^3}{4-x}$

28) $y = (x-3)^2(x+1)$;

29) $y = \frac{x+3}{2x-1}$;

30) $y = \frac{2x^2-1}{4x(x-1)}$

31) $y = \frac{x^3-3}{2(x+1)}$

32) $y = (x+1)(x-2)^2$;

33) $y = \frac{2x+5}{x-2}$;

34) $y = \frac{4-x^2}{2x-1}$

35) $y = \frac{x^3+3}{x-1}$

36) $y = (x-1)^2(x+2)$;

37) $y = \frac{2x+3}{x-2}$;

38) $y = \frac{1-4x}{1-4x^2}$

39) $y = \frac{4x^3}{3-x}$

40) $y = (x+3)^3(x+1)$;

Приложение 1. **МЕТОДИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ**

Графики дробно – рациональной функции

1. Дробно – линейная функция и ее график

С функцией вида y=k/x, где k≠0, ее свойствами и графиком мы уже познакомились. Обратим внимание на одну особенность этой функции. Функция y=k/x на множестве положительных чисел обладает тем свойством, что при неограниченном возрастании значений аргумента (когда x стремится к плюс бесконечности) значения функций, оставаясь положительными, стремятся к нулю. При убывании положительных значений аргумента (когда x стремится к нулю) значения функции неограниченно возрастают (y стремится к плюс бесконечности). Аналогичная картина наблюдается и на множестве отрицательных чисел. На графике (рис. 1) это свойство выражается в том, что точки гиперболы по мере их удаления в бесконечность (вправо или влево, вверх или вниз) от начала координат неограниченно приближаются к прямой: к оси x, когда $|x|$ стремится к плюс бесконечности, или к оси y, когда $|x|$ стремится к нулю. Такую прямую называют *асимптотами кривой.*

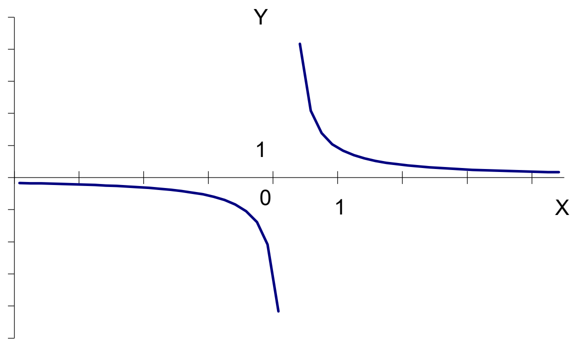


Рис. 1

Гипербола y=k/x имеет две асимптоты: ось x и ось y.

Понятие асимптоты играет важную роль при построении графиков многих функций.

Используя известные нам преобразования графиков функций, мы можем гиперболу y=k/x перемещать в координатной плоскости вправо или влево, вверх или вниз. В результате будем получать новые графики функций.

Пример 1. Пусть y=6/x. Выполним сдвиг этой гиперболы вправо на 1,5 единицы, а затем полученный график сдвинем на 3,5 единицы вверх. При этом преобразовании сдвинутся и асимптоты гиперболы y=6/x: ось x перейдет в прямую y=3,5, ось y – в прямую y=1,5 (рис. 2).

Функцию, график которой мы построили, можно задать формулой

$$y = \frac{6}{x-1{,}5} + 3{,}5\,.$$

Представим выражение в правой части этой формулы в виде дроби:

$$\frac{6}{x-1{,}5} + 3{,}5 = \frac{6\cdot 2}{2x-3} + \frac{7}{2} = \frac{24+7(2x-3)}{2(2x-3)} = \frac{14x+3}{4x-6}$$

Значит, на рисунке 2 изображен график функции, заданной формулой

$$y = \frac{14x+3}{4x-6}\,.$$

У этой дроби числитель и знаменатель - линейные двучлены относительно x. Такие функции называют дробно-линейными функциями.

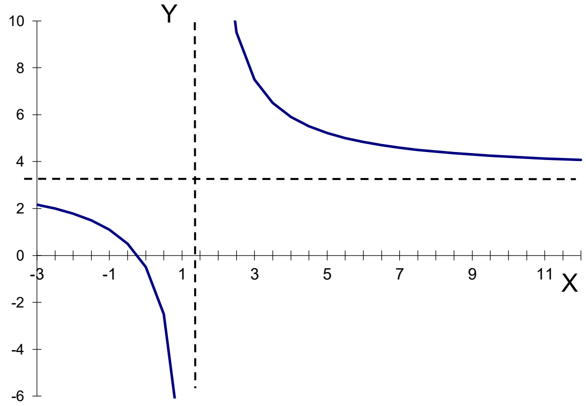


рис. 2

Вообще функцию, заданную формулой вида $y = \frac{ax+b}{cx+d}$**, где x – переменная, a, b, c, d – заданные числа, причем c≠0 и bc-ad≠0, называют дробно-линейной функцией.**

Заметим, что требование в определении о том, что c≠0 и bc-ad≠0, существенно. При c=0 и d≠0 или при bc-ad=0 мы получаем линейную функцию. Действительно, если c=0 и d≠0, то

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{d} \cdot x + \frac{b}{d}.$$

Если же bc-ad=0, c≠0, выразив из этого равенства b через a, c и d и подставив его в формулу, получим:

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{ax + {ad}/{c}}{cx+d} = \frac{acx+ad}{c(cx+d)} = \frac{a(cx+d)}{c(cx+d)} = \frac{a}{c}.$$

Итак, в первом случае мы получили линейную функцию общего вида $y = \frac{a}{d} \cdot x + \frac{b}{d}$, во втором случае – константу $y = \frac{a}{c}$.

Покажем теперь, как строить график дробно-линейной функции, если она задана формулой вида $y = \frac{ax+b}{cx+d}$

Пример 2. Построим график функции $y = \frac{2x-1}{x-3}$, т.е. представим ее в виде $\frac{k}{x-m} + n$: выделим целую часть дроби, разделив числитель на знаменатель, мы получим:

$$\frac{2x-1}{x-3} = \frac{2x-6+5}{x-3} = \frac{2(x-3)}{x-3} + \frac{5}{x-3} = \frac{5}{x-3} + 2.$$

Итак, $y = \frac{5}{x-3} + 2$. Мы видим, что график этой функции может быть получен из графика функции y=5/x с помощью двух последовательных сдвигов: сдвига гиперболы y=5/x вправо на 3 единицы, а затем сдвига полученной гиперболы $y = \frac{5}{x-3}$ вверх на 2 единицы.

При этих сдвигах асимптоты гиперболы y=5/x также переместятся: ось x на 2 единицы вверх, а ось y на 3 единицы вправо.

Для построения графика проведем в координатной плоскости пунктиром асимптоты: прямую y=2 и прямую x=3. Так как гипербола состоит из двух ветвей, то для построения каждой из них составим две таблицы: одну для x<3, а другую для x>3 (т. е. первую слева от точки пересечения асимптот, а вторую справа от нее):

x	-7	-2	-1	0	1	2	2,5
y	1,5	1	0,75	0,33	-0,5	-3	-8

x	3,5	4	5	6	7	8	13
y	12	7	4,5	3,33	3,25	3	2,52

Отметив в координатной плоскости точки, координаты которых указаны в первой таблице, и соединив их плавной линией, получим одну ветвь гиперболы. Аналогично (используя вторую таблицу) получим вторую ветвь гиперболы. График функции $y=\frac{2x-1}{x-3}$ изображен на рисунке 3.

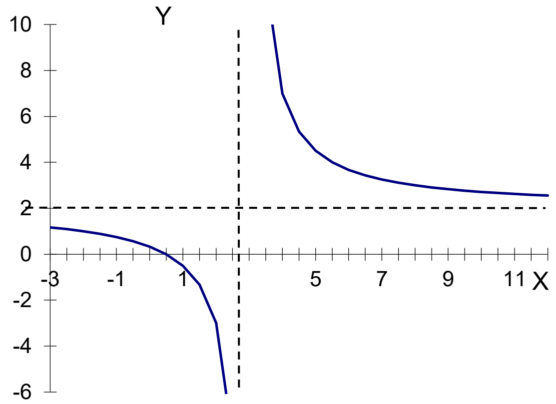


рис. 3

Любую дробь $\frac{ax+b}{cx+d}$ можно записать аналогичным образом, выделив ее целую часть. Следовательно, графики всех дробно-линейных функций являются гиперболами, различным образом сдвинутыми параллельно координатным осям и растянутыми по оси Oy.

Пример 3.

Построим график функции $y=\frac{3x+5}{2x+2}$.

Поскольку мы знаем, что график есть гипербола, достаточно найти прямые, к которым приближаются ее ветви (асимптоты), и еще несколько точек.

Найдем сначала вертикальную асимптоту. Функция не определена там, где 2x+2=0, т.е. при x=-1. Стало быть, вертикальной асимптотой служит прямая x=-1.

Чтобы найти горизонтальную асимптоту, надо посмотреть, к чему приближаются значения функций, когда аргумент возрастает (по абсолютной величине), вторые слагаемые в числителе и знаменателе дроби $\frac{3x+5}{2x+2}$ относительно малы. Поэтому

$$y=\frac{3x+5}{2x+2}\approx\frac{3x}{2x}=\frac{3}{2}.$$

Стало быть, горизонтальная асимптота – прямая y=3/2.

Определим точки пересечения нашей гиперболы с осями координат. При x=0 имеем y=5/2. Функция равна нулю, когда 3x+5=0, т.е. при x=-5/3.

Отметив на чертеже точки (-5/3;0) и (0;5/2) и проведя найденные горизонтальную и вертикальную асимптоты, построим график (рис.4).

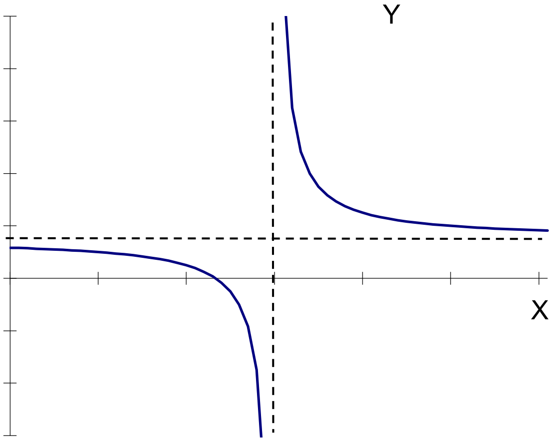


рис. 4

Вообще, чтобы найти горизонтальную асимптоту, надо разделить числитель на знаменатель, тогда y=3/2+1/(x+1), y=3/2 – горизонтальная асимптота.

2. Дробно-рациональная функция

Рассмотрим дробную рациональную функцию

$$y = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_{n-1} x + a_n} = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

у которой числитель и знаменатель - многочлены соответственно n-й и m-й степени. Пусть дробь - правильная (n < m). Известно, что любую несократимую рациональную дробь можно представить, и при том единственным образом, в виде суммы конечного числа элементарных дробей, вид которых определяется разложением знаменателя дроби Q(x) в произведение действительных сомножителей:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x-K_1)^{m_1}} + \frac{A_2}{(x-K_1)^{m_1-1}} + \ldots + \frac{A_{m_1}}{x-K_1} + \ldots + \frac{L_1}{(x-K_S)^{m_S}} + \frac{L_2}{(x-K_S)^{m_S-1}} + \ldots + \frac{L_{m_S}}{x-K_S} + \ldots +$$

$$+ \frac{B_1 x + C_1}{(x^2 + p_1 x + q_1)^{m_1}} + \ldots + \frac{B_{m_1} x + C_{m_1}}{x^2 + p_1 x + q_1} + \ldots + \frac{M_1 x + N_1}{(x^2 + p_t x + q_t)^{m_t}} + \ldots + \frac{M_{m_1} x + N_{m_1}}{x^2 + p_t x + q_t}$$

Если:

$$Q(x) = a_0 (x - k_1)^{m_1} \ldots (x - k_S)^{m_s} (x^2 + p_1 x + q_1)^{m_1} (x^2 + p_t x + q_t)^{m_1},$$

где k_1 ... k_s – корни многочлена Q (x), имеющие соответственно кратности m_1 ... m_s, а трёхчлены соответствуют парам сопряжения комплексных корней Q (x) кратности m_1 ... m_t дроби вида

$$\frac{A}{x-k}, \frac{A}{(x-k)^m}, \frac{Bx+C}{x^2 + p_1 x + q_1}, \frac{Bx+C}{(x^2 + p_1 x + q_1)^M}$$

называют *элементарными рациональными дробями* соответственно первого, второго, третьего и четвёртого типа. Тут A, B, C, к – действительные числа; m и м - натуральные числа, m, м>1; трёхчлен с действительными коэффициентами x^2+px+q имеет мнимые корни.

Очевидно, что график дробно-рациональной функции можно получить как сумму графиков элементарных дробей.

График функции

$$y = \frac{1}{(x-k)^m}$$

получаем из графика функции $1/x^m$ (m~1, 2, …) с помощью параллельного переноса вдоль оси абсцисс на $|k|$ единиц масштаба вправо. График функции вида

$$y = \frac{1}{x^2 + px + q}$$

легко построить, если в знаменателе выделить полный квадрат, а затем осуществить соответствующее образование графика функции $1/x^2$. Построение графика функции

$$y = \frac{Bx + C}{x^2 + px + q}$$

сводится к построению произведения графиков двух функций:

$$y=Bx+C \text{ и } y = \frac{1}{x^2 + px + q}$$

Замечание. Построение графиков функции

$$y = \frac{P(x)}{Q(X)}, y = \frac{(ax+b)^n}{(cx+d)^n}, \text{ где } a\,d\text{-}b\,c \neq 0,\ y = \frac{1}{(ax^2+bx+c)^n}, y = \frac{[P(x)]^n}{[Q(x)]^n},$$

где n - натуральное число, можно выполнять по общей схеме исследования функции и построения графика в некоторых конкретных примерах с успехом можно построить график, выполняя соответствующие преобразования графика; наилучший способ дают методы высшей математики.

Пример 1. Построить график функции

$$y = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 2x - 3}.$$

Выделив целую часть, будем иметь

$$y = 1 + \frac{2x - 1}{x^2 - 2x - 3}.$$

Дробь $y = \dfrac{2x-1}{x^2 - 2x - 3}$ - изобразим в виде суммы элементарных дробей:

$$\frac{2x-1}{x^2-2x-3} = \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{x-3} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{x+1}.$$

Построим графики функций:

$$y = 1, y = \frac{5}{4(x-3)}, y = \frac{3}{4(x+1)}$$

После сложения этих графиков получаем график заданной функции:

$$y = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 2x - 3} \text{ (рис. 5)}$$

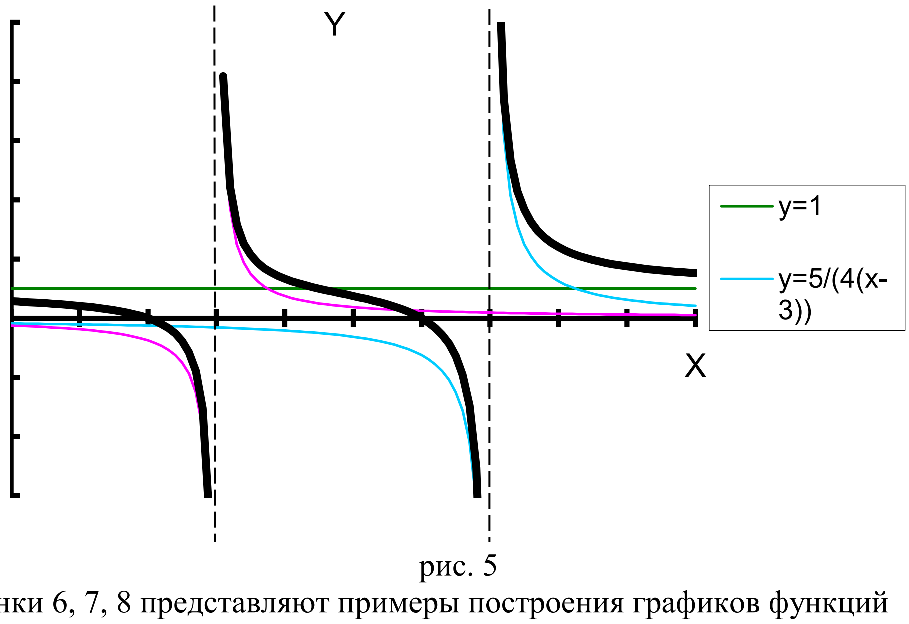


рис. 5

Рисунки 6, 7, 8 представляют примеры построения графиков функций

$y = \dfrac{2x-1}{x^2-x+1}$, $y = \dfrac{x^3+4x^2-2x+1}{x(x+1)(x^2-x+1)}$ и $y = \dfrac{3x}{1+x^3}$.

Пример 2. Построение графика функции $y = \dfrac{2x-1}{x^2-x+1}$:

$y = x^2 - x + 1$ (1); $y = 2x - 1$ (2); $y = \dfrac{1}{x^2-x+1}$ (3); $y = \dfrac{2x-1}{x^2-x+1}$ (4)

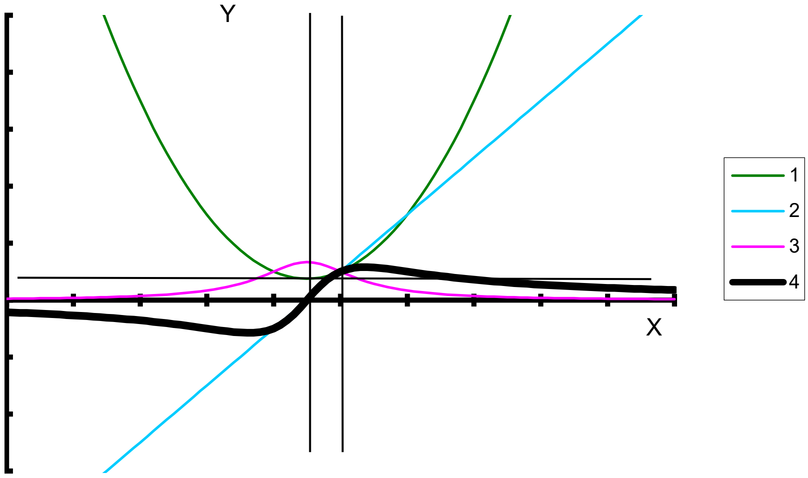


рис. 6

Пример 3. Построение графика графика функции $y = \dfrac{x^3+4x^2-2x+1}{x(x+1)(x^2-x+1)}$:

$y = \dfrac{1}{x}$ (1); $y = \dfrac{2x}{x^2-x+1}$ (2); $y = -\dfrac{2}{x+1}$ (3); $y = \dfrac{x^3+4x^2-2x+1}{x(x+1)(x^2-x+1)}$ (4)

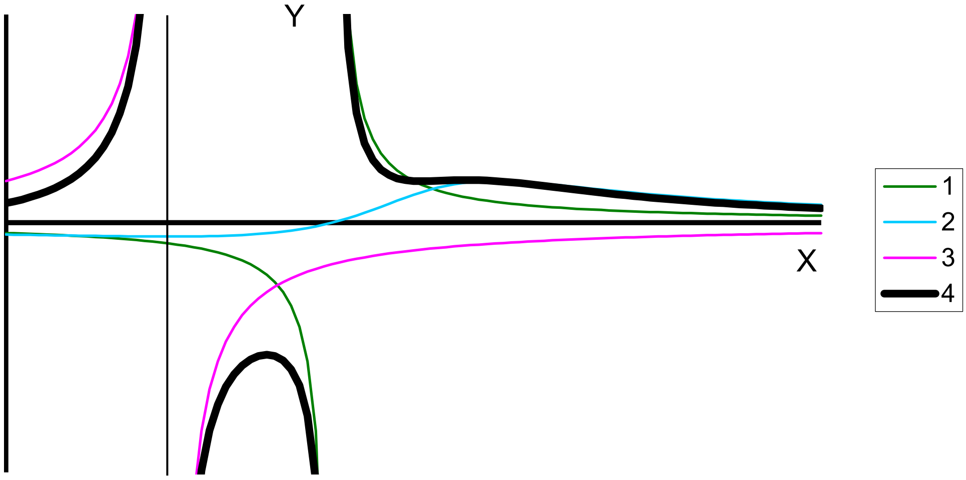


рис. 7

Пример 4. Построение графика функции $y = \dfrac{3x}{1+x^3}$:

$y = \dfrac{1}{x^2-x+1}$ (1); $y = \dfrac{x+1}{1-x+x^2}$ (2); $y = -\dfrac{1}{x+1}$ (3); $y = \dfrac{3x}{1+x^3}$ (4).

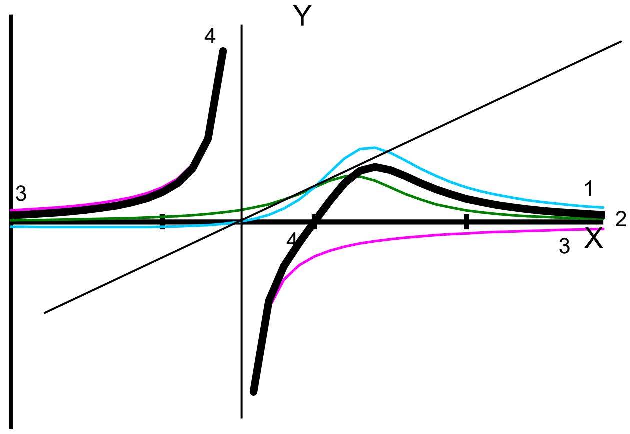


рис. 8

3. Ещё один приём построения графиков

График функции y=1/x можно построить несколько иначе. Нарисуем график функции y=x. Заменим каждую ординату величиной, ей обратной, и отметим соответствующие точки на рисунке. Получим график y=1/x (рис.1).

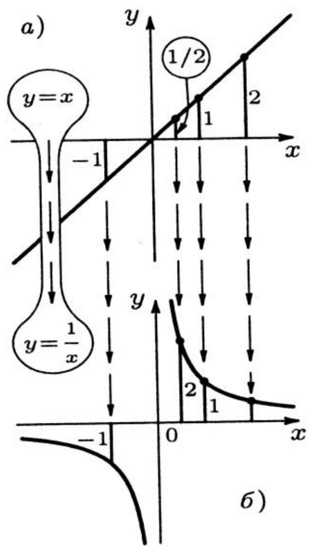
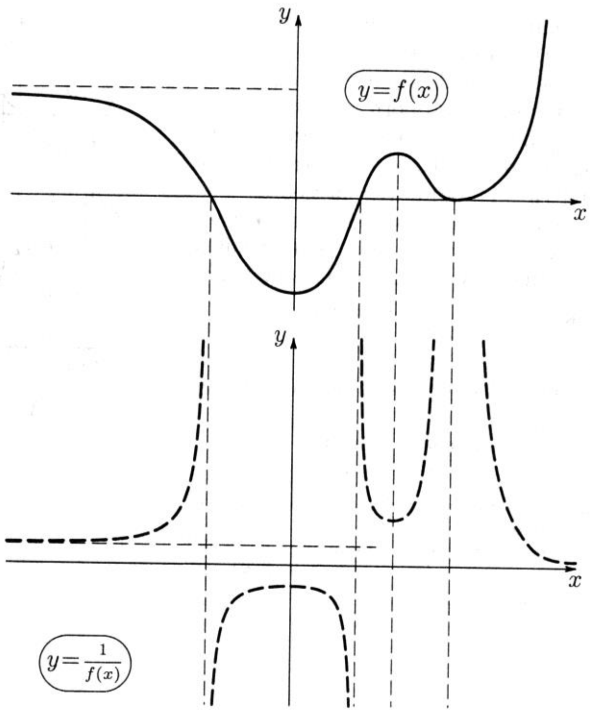


Рис.1

Нарисованная картина показывает, как маленькие (по абсолютной величине) ордината первого графика превращается в большие ординаты второго и, наоборот - большие ординаты первого в маленькие ординаты второго. Точки с ординатами, равными 1 (и - 1), остаются на месте.

Этот приём "деления" графиков бывает полезен всегда, когда у нас есть график y=f(x), а нам нужно понять, как ведёт себя функция y=1/f(x) (рис.2).



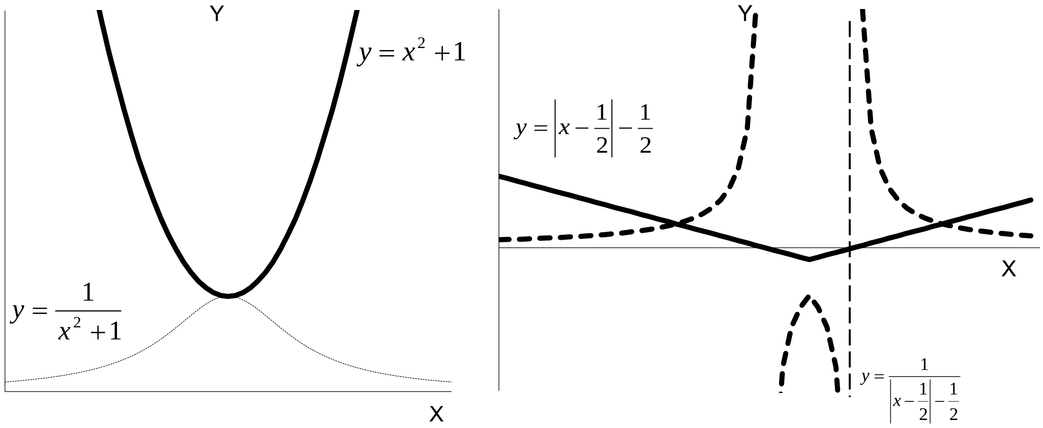


рис.2

Калькулятор для исследования функций

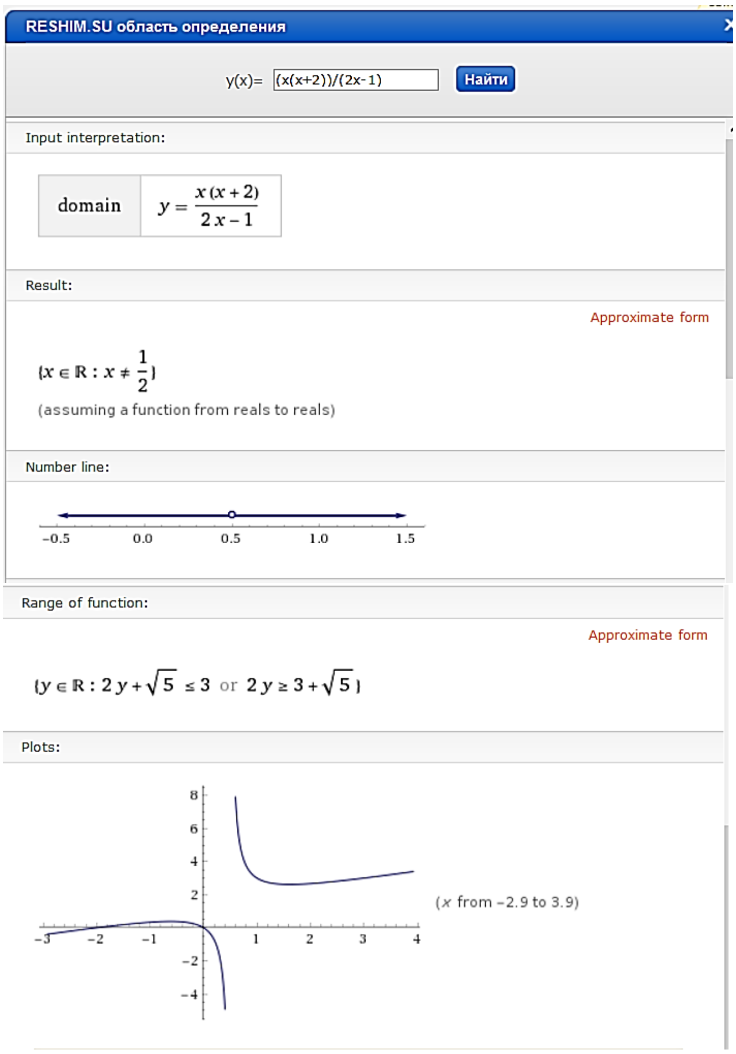
http://www.reshim.su/blog/kalkuljator_dlja_issledovanija_funkcij/2013-08-08-341

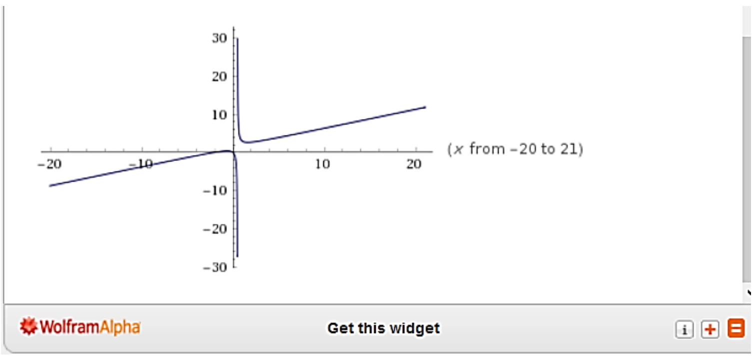
Полное исследование функции и построение графика.

С помощью данных калькуляторов можно пошагово провести полное исследование функции, и построить график функции с асимптотами.

Для этого вставляем исследуемую функцию в каждый калькулятор, как показано в примере, и получаем ответ.

1. Находим область определения функции.





2. Выясняем, не является ли функция:

а) четной, нечетной • Функции, не являющиеся ни четными, ни нечетными (neither even nor odd), называются функциями общего вида.

RESHIM.SU четность функции

y= (x(x+2))/(2x-1) **Проверить**

Result:

$y(x) = \frac{x(2+x)}{-1+2x}$ is neither even nor odd

Input interpretation:

parity	$y(x) = \frac{x(2+x)}{-1+2x}$

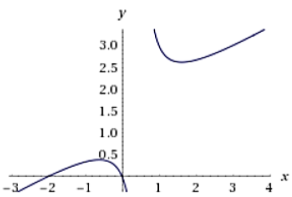
Expanded forms:

$$y = \frac{x(x+2)}{2x-1} = \frac{x^2}{2x-1} + \frac{2x}{2x-1}$$

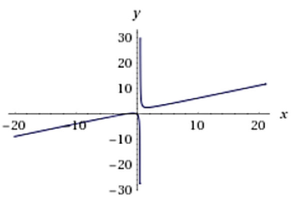
$$y = \frac{x^2}{2x-1} + \frac{2x}{2x-1}$$

Need a step by step solution for this problem? >>

Plots:



(x from −2.9 to 3.9)



(x from −20 to 21)

Domain:

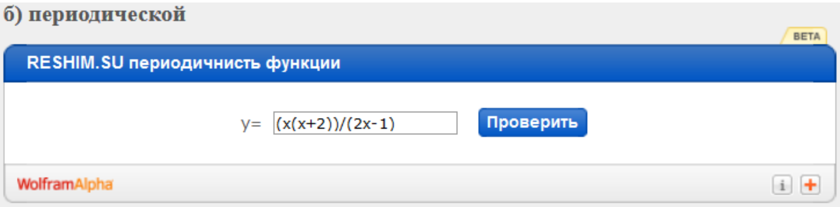
$\{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{1}{2}\}$

Range:

$\{y \in \mathbb{R} : 2y + \sqrt{5} \leq 3$ or $2y \geq 3 + \sqrt{5}\}$

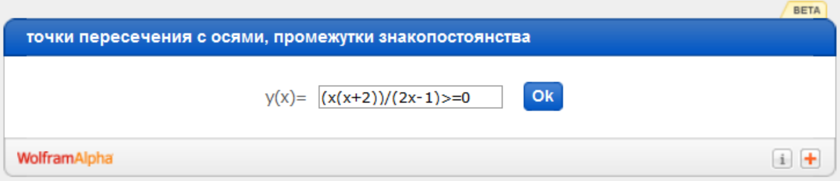
WolframAlpha Get this widget

б) периодической

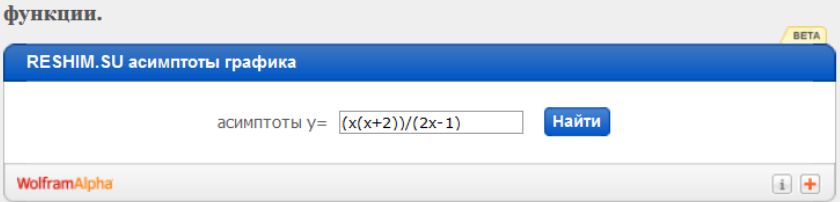


3. Находим точки пересечения графика функции с осями координат и интервалы знакопостоянства функции.

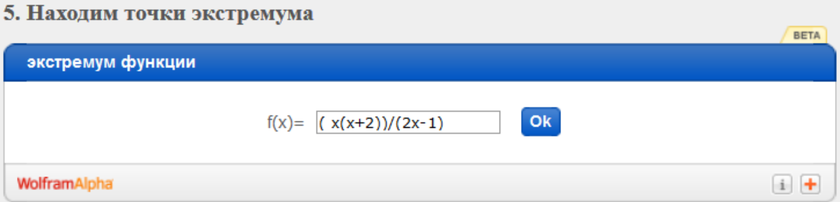
Для того, чтобы найти точки пересечения с осью Ох выбираем знак "=", для нахождения интервалов на которых функция положительна - зак ">", для интервалов на которых функция отрицательна - знак "<".



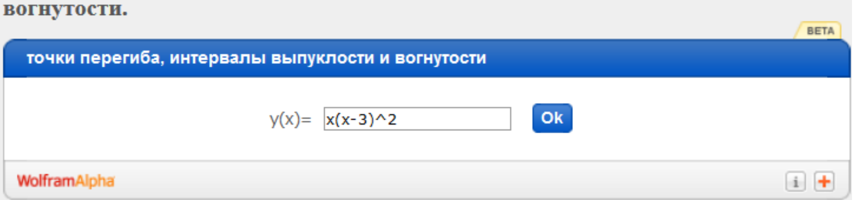
4. Находим вертикальные, наклонные, горизонтальные асимптоты графика функции.



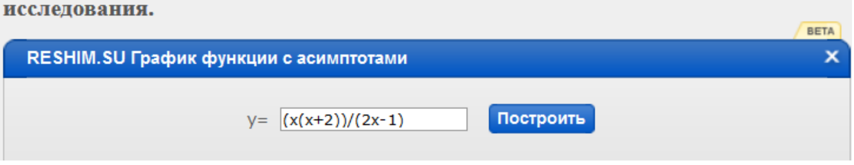
5. Находим точки экстремума



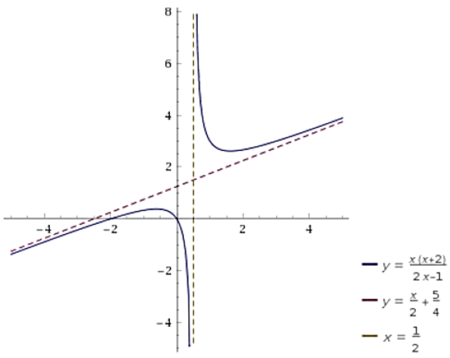
6. Найти точки перегиба графика функции и интервалы его выпуклости и вогнутости.



7. Построить график функции, используя все полученные результаты исследования.



Plot:



WolframAlpha

Get this widget